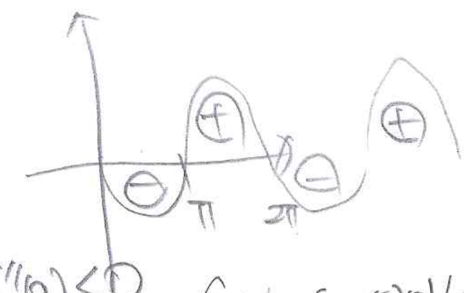
3. $f(x)=x+\sin x$

$g(x)=f(f(x))$.

ㄱ. $f(x)$ $(0,\pi)$에서 위로볼록?

$f'(x)=1+\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

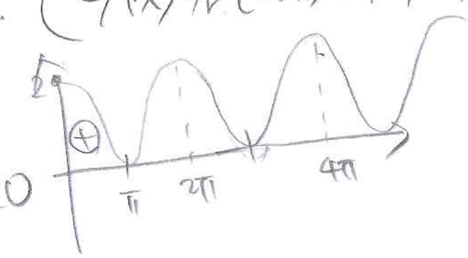


$(0,\pi)$에서 $\underline{f''(x)<0}$ $f(x)$는 $(0,\pi)$에서 위로볼록 (o)

ㄴ. $g(x)$는 열린구간 $(0,\pi)$에서 증가한다. ($g'(x)$가 $(0,\pi)$에서 $g'(x)\geq 0$ 임을 보인다)

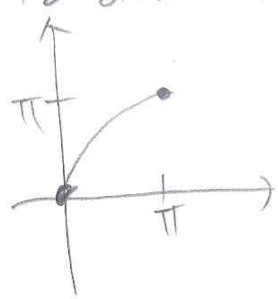
$g'(x)=\boxed{f'(f(x))}\boxed{f'(x)}$

↳ $(0,\pi)$에서 $f'(x)\geq 0$



$f(x)$는 증가함수이며 $(\because f'(x)\geq 0)$

$f(0)=0$ $f(\pi)=\pi$



구간 $(0,\pi)$에서 $0<f(x)<\pi$이고, $f'(f(x))$는 ≥ 0.

$\therefore$ $g'(x)=\underbrace{f'(f(x))}_{\geq 0}\,\underbrace{f'(x)}_{\geq 0}\geq 0$ 이므로 $g(x)$는 $(0,\pi)$에서 증가한다 (o)

ㄷ. $g'(x)=1$ 실수 x가 $(0,\pi)$에 존재?

$g(x)$는 $[0,\pi]$ 연속 $(0,\pi)$ 미분가능

$$\frac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=\frac{f(f(\pi))-f(f(0))}{\pi}=\frac{\pi-0}{\pi}=1=g'(c)$$

가 $(0,\pi)$에 존재한다.

ㄷ. (o)

답 ⑤