정답 및 해설

1) 답 ④

[해설] 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

5명의 학생 중에서 임의로 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

이때 여학생이 0명 뽑힐 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

여학생이 1명 뽑힐 확률은

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$$

따라서

$$P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{10}+\frac{6}{10}=\frac{7}{10}$$

2) 답 ③

[해설] 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}\quad (\text{단}, x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

따라서

$$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

3) 답 ①

[해설] 5장의 카드 중에서 임의로 2장의 카드를 동시에 뽑는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

뽑힌 2장의 카드에 적힌 수의 차인 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6, 8이고 이 경우를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

$X=2$인 경우 : (1, 3), (3, 5), (5, 7), (7, 9)

$X=4$인 경우 : (1, 5), (3, 7), (5, 9)

$X=6$인 경우 : (1, 7), (3, 9)

$X=8$인 경우 : (1, 9)

따라서

$$P(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

4) 답 ③

[해설] 50원 짜리 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 10원 짜리 동전의 앞면을 h, 뒷면을 t라 할 때, 받을 수 있는 상금은

$(H,\ H,\ h)$ 일 때, $50+50+10=110$

$(H,\ H,\ t)$ 일 때, $50+50=100$

$(H,\ T,\ h)$, $(T,\ H,\ h)$ 일 때, $50+10=60$

$(H,\ T,\ t)$, $(T,\ H,\ t)$ 일 때, 50

$(T,\ T,\ h)$ 일 때, 10

$(T,\ T,\ t)$ 일 때, 0

따라서 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 10, 50, 60, 100, 110

이고, 그 각각의 확률은 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10	50	60	100	110	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 X의 평균은

$$E(X)=0\times\frac{1}{8}+10\times\frac{1}{8}+50\times\frac{2}{8}+60\times\frac{2}{8}+100\times\frac{1}{8}+110\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{440}{8}=55(\text{원})$$

5) 답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	$\frac{5}{k}$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k}+\frac{3}{k}+\frac{4}{k}+\frac{5}{k}=1$$

$$\frac{15}{k}=1\quad\therefore\ k=15$$

따라서 $P(1\le X\le 3)$의 값은

$$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

6) 답 ④

[해설] 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, X가 각각의 값을 가질 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 $E(X)$의 값은

$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

7) 답 ④

[해설] 두 개의 정육면체 모양의 상자 A, B의 윗면에 적혀 있는 두 수의 합이 확률변수 X이므로 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6 이다.

(1, 1)일 때 $X=2$이고 $P(X=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(1, 2), (2, 1)일 때 $X=3$이고

$$P(X=3)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}\times 2=\frac{4}{36}$$

(2, 2), (1, 3), (3, 1)일 때 $X=4$이고

$$P(X=4)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{10}{36}$$

(2, 3), (3, 2)일 때 $X=5$이고

$$P(X=5)=\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}\times 2=\frac{12}{36}$$

(3, 3)일 때 $X=6$이고 $P(X=6)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

이때

$$E(X)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{4}{36}+4\times\frac{10}{36}+5\times\frac{12}{36}+6\times\frac{9}{36}=\frac{14}{3}$$

따라서

$$V(X)=2^2\times\frac{1}{36}+3^2\times\frac{4}{36}+4^2\times\frac{10}{36}+5^2\times\frac{12}{36}+6^2\times\frac{9}{36}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$$

이므로

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

8) 답 ②

[해설] A병에 맞는 뚜껑을 찾을 때까지 확인한 횟수가 확률변수 X이므로 X가 취하는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 각각의 값을 취할 확률은

$$P(X=1)=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$$

$$P(X=5)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$$

이때 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

이때

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$$

$$V(X)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}-3^2$$

$$=\frac{55}{5}-9=2$$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}$

9) 답 ⑤

[해설] 5개의 공에서 임의로 2개의 공을 동시에 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고 확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

이때 X가 각각의 값을 취할 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{6}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$$

이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때

$$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$$

$$V(X)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{6}{10}+2^2\times\frac{3}{10}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

이므로

$$E(-5X+9)=-5E(X)+9=-5\times\frac{6}{5}+9=3$$

$$V(-5X+9)=25V(X)=25\times\frac{9}{25}=9$$

따라서 구하는 값은

$$E(-5X+9)+V(-5X+9)=3+9=12$$

10) 답 ④

[해설] 확률의 총합은 1이므로

$$a^2+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=1,\ 2a^2+a-1=0,\ (a+1)(2a-1)=0$$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

이때

$$E(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$$

이므로

$$E(4X+2)=4E(X)+2=4\times\frac{9}{4}+2=11$$

11) 답 8

[해설] 확률변수 X는 주사위 1개를 던져서 나온 눈의 수의 양의 약수의 개수와 같으므로 주사위의 눈의 수에 따른 X의 값은 다음과 같다.

주사위의 눈의 수가 1이면 $X=1$

주사위의 눈의 수가 2, 3, 5이면 $X=2$

주사위의 눈의 수가 4이면 $X=3$

주사위의 눈의 수가 6이면 $X=4$

따라서 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

이때

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{3}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$$

$$V(X)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{3}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

$$=\frac{19}{3}-\frac{49}{9}=\frac{8}{9}$$

이므로

$$V(3X+7)=3^2V(X)=9V(X)=9\times\frac{8}{9}=8$$

12) 답 ①

[해설] 1회의 시행에서 2개의 동전이 모두 앞면이 나오는 확률은 $\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x}\quad(\text{단}, x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=10\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$$

$$V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$$

따라서 구하는 값은

$$E(X)+(X)=\frac{5}{2}+\frac{15}{8}=\frac{35}{8}$$

13) 답 72

[해설] 한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}\quad(\text{단}, x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때 $\sigma(X)=4$이므로 $\sqrt{n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=4$

$\frac{2n}{9}=16$에서 $n=72$

14) 답 ③

[해설] 1회의 시행에서 모두 같은 색의 공이 나올 확률은

$\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{20-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 20$)

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=20\times\frac{2}{5}=8$

그러므로 $E(2X+3)$의 값은

$E(2X+3)=2E(X)+3=2\times8+3=19$

15) 답 ①

[해설] 확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=8)$

$=\frac{k}{1\times3}+\frac{k}{2\times4}+\cdots+\frac{k}{8\times10}$

$=\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\right\}$

$=\frac{k}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{29}{45}k=1$

따라서 $k=\frac{45}{29}$

16) 답 ④

[해설] 확률의 총합은 1이므로

$a+b+a^2=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=(-1)\times a+0\times b+1\times a^2=-\frac{1}{4}$이므로

$a^2-a=-\frac{1}{4}$

$4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$ $\quad\therefore\ a=\frac{1}{2}$

a의 값을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1$ $\quad\therefore\ b=\frac{1}{4}$

따라서 $a+b$의 값은

$a+b=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

17) 답 ③

[해설] 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 두 수를 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이고, 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

(1, 2), (2, 3), (3, 4)일 때 $X=1$

(1, 3), (2, 4)일 때 $X=2$

(1, 4)일 때 $X=3$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$E(X)=1\times\frac{3}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$V(X)=1^2\times\frac{3}{6}+2^2\times\frac{2}{6}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이므로

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

18) 답 ①

[해설] $E(X)=5$, $V(X)=4$이므로

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$=5a+b$

$=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$V(aX+b)=a^2V(X)=4a^2=1$

$a>0$이므로 $a=\frac{1}{2}$

a의 값을 ㉠에 대입하면 $b=-\frac{5}{2}$

따라서 $a+b$의 값은

$a+b=\frac{1}{2}+\left(-\frac{5}{2}\right)=-2$

19) 답 ①

[해설] 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이때

$P(X=1)={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $P(X=n)={}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이므로 $P(X=1)=12P(X=n)$에서

${}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n=12{}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=12$

즉, 확률변수 X가 이항분포 $B\left(12,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=12\times\frac{1}{2}=6$

$V(X)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3$

따라서

$E(X)+V(X)=6+3=9$

20) 답 ②

[해설] 확률변수 X가 취하는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{4}{10}$

$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때

$E(X)=2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}=\frac{30}{10}$

$=3$

$E(X^2)=2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{4}{10}+4^2\times\frac{3}{10}=\frac{96}{10}=\frac{48}{5}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{48}{5}-9=\frac{3}{5}$

21) 답 ④

[해설] 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

이때

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{91}{6}$

이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$

또, 확률변수 X, Y, Z가 각각의 값을 취할 확률은 모두 $\frac{1}{6}$이므로 확률변수 X, Y, Z의 관계식은

$Y=X+5$, $Z=3X$

따라서

$V(Y)=V(X+5)=V(X)=\frac{35}{12}$

$V(Z)=V(3X)=9V(X)=9\times\frac{35}{12}=\frac{315}{12}=\frac{105}{4}$

이므로

$V(X)+V(Y)+V(Z)=\frac{35}{12}+\frac{35}{12}+\frac{105}{4}=\frac{385}{12}$

22) 답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{25}C_x p^x(1-p)^{25-x}$이므로 X는 이항분포 $B(25,\ p)$를 따른다.

$E(X)=5$이므로 $25\times p=5$에서 $p=\frac{1}{5}$

따라서

$V(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+25=29$

23) 답 150

[해설] 4의 양의 약수는 1, 2, 4이므로 4의 양의 약수가 적힌 영역에 화살이 꽂힐 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(80,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=80\times\frac{1}{2}=40$

$V(X)=80\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=20$

따라서

$E(2X-10)=2E(X)-10=2\times40-10=70$

$V(2X-10)=4V(X)=4\times20=80$

이므로

$E(2X-10)+V(2X-10)=70+80=150$

24) 답 161

[해설] 확률변수 X가 취하는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 수학적 확률과 여사건의 확률을 이용하여 각각의 확률을 구하면

$P(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{36}$

$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{36}$

$P(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{7}{36}$

$P(X=5)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}-\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{9}{36}$

$P(X=6)=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

따라서

$E(X)=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}$

$=\frac{161}{36}$

이므로

$E(36X)=36E(X)=36\times\frac{161}{36}=161$

25) 답 ③

[해설] $b+a+2a=1$에서 $b=1-3a$이고

$a\ge0$, $b\ge0$이므로

$a\ge0$, $1-3a\ge0$

$0\le a\le\frac{1}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$E(X)=0\times b+1\times a+2\times2a$

$=5a$

$V(X)=0^2\times b+1^2\times a+2^2\times2a-(5a)^2$

$=-25a^2+9a$

$=-25\left(a-\frac{9}{50}\right)^2+\frac{81}{100}$

㉠에서 $0\le a\le\frac{1}{3}$이므로

$a=\frac{9}{50}$일 때 $V(X)$의 최댓값은 $\frac{81}{100}$이다.

따라서 $\alpha=\frac{9}{50}$, $\beta=\frac{81}{100}$이므로

$\alpha+\beta=\frac{99}{100}$

26) 답 ②

[해설] 전체 공의 개수는

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

이므로

$P(X=k)=\frac{(k\text{가 쓰여진 공의 개수})}{(\text{전체 공의 개수})}$

$=\frac{2k}{n(n+1)}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

$V(X)=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)-\{E(X)\}^2$

이므로

$V(X)+\{E(X)\}^2=\sum_{k=1}^{n}k^2P(X=k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{k^2\times\frac{2k}{n(n+1)}\right\}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^3$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

따라서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$이므로 $ab=\frac{1}{4}$

27) 답 152

[해설] 확률변수 X가 가지는 값은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이루므로 확률변수 Y를 $X=3Y+2$, 즉 $Y=\frac{X-2}{3}$로 놓으면 Y는 이항분포 $B\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때

$E(Y)=20\times\frac{1}{4}=5$

$V(Y)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$

따라서

$E(X)=E(3Y+2)=3E(Y)+2=3\times5+2=17$

$V(2X)=4V(X)=4V(3Y+2)$

$=4\times9\times V(Y)=4\times9\times\frac{15}{4}=135$

이므로

$E(X)+V(2X)=17+135=152$

28) 답 ⑤

[해설] [전략] $p\le X\le q$의 값을 갖는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=p, x=q$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

(2) $P(\alpha\le X\le\beta)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\alpha, x=\beta$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다. (단, $p\le\alpha\le\beta\le q$)

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $2\times\left\{\frac{1}{2}\times(a+b)\times1+\frac{1}{2}\times1\times a\right\}=1$

$2a+b=1$ ...... ㉠

또, $P(-2\le X\le-1)=\frac{1}{7}$이므로 $\frac{1}{2}\times1\times a=\frac{1}{7}$에서

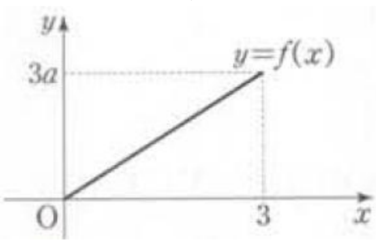
$a=\frac{2}{7}$ ...... ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a=\frac{2}{7}, b=\frac{3}{7}$ 이므로

$70(a+b)=70\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{7}\right)=70\times\frac{5}{7}=50$

29) 답 ④

[해설] 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

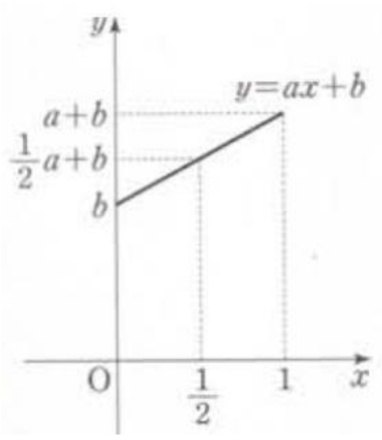
즉, $\frac{1}{2}\times3\times3a=1$에서

$a=\frac{2}{9}$ 따라서 $P(0\le X\le1)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$ 이므로

$P(1\le X\le3)=1-P(0\le X\le1)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

30) 답 ②

[해설] $a>o, b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0, x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times\{b+(a+b)\times1\}=1$에서

$a+2b=2$ ...... ㉠

또, $P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left\{b+\left(\frac{1}{2}a+b\right)\right\}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b$

$\frac{1}{8}a+\frac{1}{2}b=\frac{3}{8}$에서

$a+4b=3$ ...... ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=\frac{1}{2}$ 이므로

$a+b=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

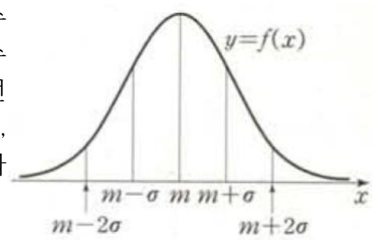
31) 답 ④

[해설] [전략] 정규분포 $N(m,\sigma^2)$을 따르는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는

(1) 직선 $x=m$에 대하여 대칭인 종 모양의 곡선이다.

(2) 곡선과 x축 사이의 넓이는 1이다.

오른쪽 그림과 같이 확률변수 X의 확률밀도 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이의 넓이는 1이다.



$P(m\le X\le m+\sigma)=\frac{p_1}{2}, P(m\le X\le m+2\sigma)=\frac{p_2}{2}$이므로

$P(m-2\sigma\le X\le m-\sigma)=P(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$

$=P(m\le X\le m+2\sigma)-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=\frac{p_2}{2}-\frac{p_1}{2}$

또, $P(X\ge m+\sigma)=\frac{1}{2}-P(m\le X\le m+\sigma)$

$=\frac{1}{2}-\frac{p_1}{2}$

따라서
$P(m-2\sigma \le X \le m-\sigma)+P(X \ge m+\sigma)$
$=\left(\frac{p_2}{2}-\frac{p_1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{p_1}{2}\right)=\frac{1-2p_1+p_2}{2}$

$h(-2)=-2-a,\ h(-1)=2-a,\ h(1)=-2-a,\ h(3)=18-a$
이므로 닫힌 구간 $[-2,\ 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $18-a$, 최솟값은 $-2-a$이다. 따라서 닫힌 구간 $[-2,\ 3]$에서 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면 $18-a<a,\ a>18$이어야 하므로 정수 a의 최솟값은 19이다.

32) 답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로
$P(2a-1 \le X \le 2a+3)$의 값이 최대일 때는 $2a-1$과 $2a+3$의 평균이 m일 때이다.
즉, $m=\frac{2a-1+2a+3}{2}=\frac{4a+2}{2}=2a+1$일 때이므로
$a=\frac{m-1}{2}$

33) 답 27

[해설] (ⅰ) $m<10$이므로 자연수 m의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 9이고, 그 개수는 9이다.
(ⅱ) $\sigma<4$이므로 자연수 σ의 값은 1, 2, 3이고, 그 개수는 3이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $9\times3=27$

34) 답 606

[해설] [전략]
(1) 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
(2) 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여
$P(0 \le Z \le k)=P(-k \le Z \le 0)$ (단, $k>0$)

이 회사에서 생산하는 제품 A의 무게를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(500,5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-500}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 또, 이 회사에서 생산하는 제품 B의 무게를 확률변수 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{Y-600}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$P(X \le 495)=P(Y \ge k)$
$P\left(\frac{X-500}{5} \le \frac{495-500}{5}\right)=P\left(\frac{Y-600}{6} \ge \frac{k-600}{6}\right)$
$P(Z \le -1)=P\left(Z \ge \frac{k-600}{6}\right)$
따라서 $\frac{k-600}{6}=1$ 이므로 상수 k의 값은 606이다.

35) 답 49

[해설] $Z=\frac{X-24}{2}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
(ⅰ) $P(X \ge a)=P\left(\frac{X-24}{2} \ge \frac{a-24}{2}\right)$
$=P\left(Z \ge \frac{a-24}{2}\right)$
$=P\left(\frac{a-24}{2} \le Z \le 0\right)+0.5$
$=P\left(0 \le Z \le \frac{24-a}{2}\right)+0.5$
$P(X \ge a)=0.8413$이므로
$P\left(0 \le Z \le \frac{24-a}{2}\right)=0.3413$
$\frac{24-a}{2}=1$에서 $a=22$
(ⅱ) $P(X \le b)=P\left(\frac{X-24}{2} \le \frac{b-24}{2}\right)$
$=P\left(Z \le \frac{b-24}{2}\right)$
$=0.5+P\left(0 \le P \le \frac{b-24}{2}\right)$
$P(X \le b)=0.9332$이므로
$P\left(0 \le Z \le \frac{b-24}{2}\right)=0.4332$
$\frac{b-24}{2}=1.5$에서 $b=27$이므로
$a+b=22+27=49$

36) 답 ③

[해설] 이 고등학교 학생의 하루 물 섭취량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1300,\ 100^2)$을 따르고,
$Z=\frac{X-1300}{100}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은
$P(X \ge 1450)=P\left(\frac{X-1300}{100} \ge \frac{1450-1300}{100}\right)$
$=P(Z \ge 1.5)=0.5-P(0.5 \le Z \le 1.5)$
$=0.5-0.4332=0.0668$

37) 답 ①

[해설][전략] 확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따를 때, n이 충분히 크면 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(np,\ npq)$를 따른다.
(단, $q=1-p$)
정오각형 $A_1A_2A_3A_4A_5$의 꼭짓점 중에서 서로 다른 두 점을 택하는 경우의 수는 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$
선분 A_iA_j가 정오각형의 변이 되는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100,\frac{1}{2}\right)$을 따르므로
$E(X)=100\times\frac{1}{2}=50,\ V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25=5^2$
이때 100 이 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은
$P(X \ge 60)=P\left(\frac{X-50}{5} \ge \frac{60-50}{5}\right)$
$=P(Z \ge 2)=0.5-P(0 \le Z \le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

38) 답 ③

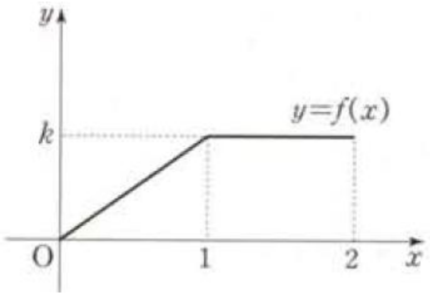
[해설] 조건 (가) 에서 확률변수 X는 이항분포 $B(1200,\ p)$를 따르므로 $E(X)=1200p$ 조건(나)에서 $E(X)=300$ 이므로
$1200p=300$에서 $p=\frac{1}{4}$
즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(1200,\frac{1}{4}\right)$을 따르므로
$V(X)=300\times\frac{3}{4}=225=15^2$
이때 1200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 15^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-300}{15}$으로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 330) = P\left(\frac{X-300}{15} \geq \frac{330-300}{15}\right) = P(Z \geq 2)$$
$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.5 - 0.4772$$
$$= 0.0228$$

39) 답 ③

[해설] 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 1\times k+1\times k=1$ 따라서 $\frac{3}{2}k=1$에서 $k=\frac{2}{3}$

40) 답 ⑤

[해설] 함수 $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 4\times k = 1$에서 $k=\frac{1}{2}$ 따라서 구하는 값은

$$P(|X| \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1)$$
$$= P(-1 \leq X \leq 0) + P(0 \leq X \leq 1)$$
$$= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\times 1$$
$$= \frac{1}{4}+\frac{5}{12} = \frac{2}{3}$$

41) 답 ①

[해설] $Z=\dfrac{X-40}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(32 \leq X \leq 36) = P\left(\frac{32-40}{4} \leq \frac{X-40}{4} \leq \frac{36-40}{40}\right)$$
$$= P(-2 \leq Z \leq -1) = P(1 \leq Z \leq 2)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$
$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

42) 답 ②

[해설] 확률변수 X가 정규분포 $N(55, \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-55}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$$P(X \geq 45) = P\left(\frac{X-55}{\sigma} \geq X\frac{45-55}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(Z \geq \frac{-10}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{-10}{\sigma} \leq Z \leq 0\right)+0.5$$
$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right)+0.5$$

이므로 $P\left(0 \leq Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)+0.5 = 0.9772$에서

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.4772$$
$$P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$$

$\dfrac{10}{\sigma} = 2$ 따라서 구하는 σ의 값은 5이다.

43) 답 ②

[해설] 확률변수 X가 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$를 따르므로

$$E(X) = 100\times\frac{1}{5} = 20$$
$$V(X) = 100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5} = 16 = 4^2$$

이때 100은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(16 \leq X \leq 26) = P\left(\frac{16-20}{4} \leq \frac{X-20}{4} \leq \frac{26-20}{4}\right)$$
$$= P(-1 \leq Z \leq 1.5)$$
$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$
$$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$

44) 답 ②

[해설] $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0, x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

조건 (가)에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$$P(0 \leq X \leq 3) = P(3 \leq X \leq 6) = \frac{1}{2}$$

조건 (나)에서 $P(x \leq X \leq 3) = a-\dfrac{x^2}{18}$에 $x=0$을 대입하면

$P(0 \leq X \leq 3) = a$에서 $a=\dfrac{1}{2}$ 따라서 구하는 값은

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(2 \leq X \leq 3) + P(3 \leq X \leq 5)$$
$$= P(2 \leq X \leq 3) + P(1 \leq X \leq 3)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{18}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{18}\right)$$
$$= \frac{5}{18}+\frac{8}{18} = \frac{13}{18}$$

45) 답 245

[해설] $\sigma(X)=\sigma(Y)$ 이므로 $\dfrac{m_1+m_2}{2} = 10$에서

$m_1+m_2=20$ 또, $P(m_1 \leq X \leq 10) = P(10 \leq Y \leq m_2)$이므로

$$P(m_1 \leq X \leq 10) + P(10 \leq Y \leq m_2)$$
$$= 2P(m_1 \leq X \leq 10)$$

$2P(m_1 \leq X \leq 10) = 0.9974$에서

$P(m_1 \leq X \leq 10) = 0.4987$

$Z=\dfrac{X-m_1}{5}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르므로 $P(m_1 \leq X \leq 10)$

$$P\left(\frac{m_1-m_1}{5} \leq \frac{X-m_1}{5} \leq \frac{10-m_1}{5}\right)$$
$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{10-m_1}{5}\right) = 0.4987$$

$P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\frac{10-m_1}{5} = 3$$
$$m_1 = -5$$

$m_1+m_2 = 20$이므로 $m_2 = 25$ 따라서 구하는 값은

$m_1+10m_2 = -5+10\times 25 = 245$

46) 답 ①

[해설] 이 자격시험의 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X는 절

규분포 $\mathrm{N}(100,\ 20^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-100}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 갑이 1급 자격을 얻는 사건을 A, 갑의 시험 점수가 130점 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B\mid A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$이다.

$$P(A)=P(X\ge 128)=P\left(\frac{X-100}{20}\ge\frac{128-100}{20}\right)$$
$$=P(Z\ge 1.4)=0.5-P(0\le Z\le 1.4)$$
$$=0.5-0.4192=0.0808$$

$$P(A\cap B)=P(X\ge 130)=P\left(\frac{X-100}{20}\ge\frac{130-100}{20}\right)$$
$$=P(Z\ge 1.5)=0.5-P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668$$

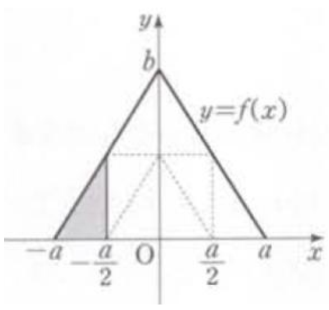
따라서 구하는 확률은

$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.0668}{0.0808}=\frac{167}{202}$$

47) 답 ②

[해설] $f(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

즉, $\dfrac{1}{2}\times 2a\times b=1$에서 $ab=1$ …… ㉠



또, $P(-a\le X\le a-b)=\dfrac{1}{8}$이므로 위의 그림에서

$a-b=-\dfrac{a}{2}$즉, $3a-2b=0$ …… ㉡

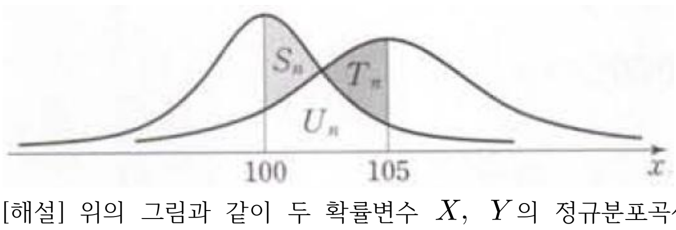
㉠에서 $b=\dfrac{1}{a}$이고, 이것을 ㉡에 대입하면

$$3a-\frac{2}{a}=0$$

$3a^2-2=0$ 따라서 $a^2=\dfrac{2}{3}$, $b^2=\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2}$이므로

$$6(a^2+b^2)=6\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right)=4+9=13$$

48) 답 ⑤



[해설] 위의 그림과 같이 두 확률변수 X, Y의 정규분포곡선과 x축 및 두 직선 $x=100$, $x=105$로 둘러싸인 부분에서 S_n, T_n을 제외한 부분의 넓이를 U_n이라 하자. 확률변수 X가 정규분포 $N(100,\ n^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-100}{n}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $(0,\ 1)$을 따른다.

$P(100\le X\le 105)$

$$=P\left(\frac{100-100}{n}\le\frac{X-100}{n}\le\frac{105-100}{n}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{5}{n}\right)\text{이므로}$$

$S_n+U_n=P\left(0\le Z\le\dfrac{5}{n}\right)$ …… ㉠

또, 확률변수 Y가 정규분포 $N(105,\ (n+1)^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{Y-105}{n+1}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. $P(100\le Y\le 105)$

$$=P\left(\frac{100-105}{n+1}\le\frac{Y-105}{n+1}\le\frac{105-105}{n+1}\right)$$
$$=P\left(-\frac{5}{n+1}\le Z\le 0\right)=P\left(0\le Z\le\frac{5}{n+1}\right)$$ 이므로

$T_n+U_n=P\left(0\le Z\le\dfrac{5}{n+1}\right)$ …… ㉡

㉠ - ㉡에서

$$S_n-T_u=P\left(0\le Z\le\frac{5}{n}\right)-P\left(0\le Z\le\frac{5}{n+1}\right)$$
$$=P\left(\frac{5}{n+1}\le Z\le\frac{5}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{10}(S_n-T_u)$$
$$=P\left(\frac{5}{2}\le Z\le\frac{5}{1}\right)+P\left(\frac{5}{3}\le Z\le\frac{5}{2}\right)+P\left(\frac{5}{4}\le Z\le\frac{5}{3}\right)$$
$$+\cdots+P\left(\frac{5}{11}\le Z\le\frac{5}{10}\right)$$
$$=P\left(\frac{5}{11}\le Z\le\frac{5}{10}\right)+P\left(\frac{5}{10}\le Z\le\frac{5}{9}\right)+P\left(\frac{5}{9}\le Z\le\frac{5}{8}\right)$$
$$+\cdots+P\left(\frac{5}{2}\le Z\le\frac{5}{1}\right)=P\left(\frac{5}{11}\le Z\le 5\right)$$

따라서 구하는 상수 a의 값은 $\dfrac{5}{11}$이다.

49) 답 6

[해설] 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이기는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) A가 가위, B가 보를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

(ⅱ) A가 바위 , B가 가위를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

(ⅲ) A가 보, B가 바위를 낸 경우

이 경우의 확률은 $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$

(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ) 에서 가위바위보를 한 번 할 때 A가 이길 확률은

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

이 시행을 n회 반복할 때, A가 이기는 횟수를 확률변수 X라 하고, A가 얻는 점수의 합을 확률변수 Y라 하자.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\dfrac{3}{8}\right)$을 따르므로

$$E(X)=n\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}n$$

또 , $Y=3X+(n-X)=2X+n$이므로

$$E(Y)=E(2X+n)=2E(X)+n$$
$$=2\times\frac{3}{8}n+n=\frac{7}{4}n$$

A가 얻는 점수의 합의 기댓값이 105점이므로 $\dfrac{7}{4}n=105$

$n=60$ 즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(60,\dfrac{3}{8}\right)$을 따르므로

$E(X) = 60 \times \frac{3}{8} = \frac{45}{2}$

$V(X) = 60 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{225}{16} = \left(\frac{15}{4}\right)^2$

이때 60은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(\frac{45}{2},\ \left(\frac{15}{4}\right)^2\right)$을 따르고, $Z = \dfrac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}$로 놓으면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(Y \geq 120) = P(2X+60 \geq 120) = P(X \geq 30)$$
$$= P\left(\frac{X-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}} \geq \frac{30-\frac{45}{2}}{\frac{15}{4}}\right)$$
$$= P(Z \geq 2) = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2)$$
$$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

50) 답 ②

[해설] 주머니에서 임의로 꺼낸 공에 적힌 수가 1,2,3,4일 확률은 각각 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$이다.

첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_1, 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_2라 하면 $\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$

(ⅰ) $\overline{X}=2$인 경우

$X_1+X_2=4$를 만족시키는 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$는 $(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 1)$이므로

$P(\overline{X}=2) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ⅱ) $\overline{X}=\frac{5}{2}$인 경우

$X_1+X_2=5$를 만족시키는 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$는 $(1,\ 4)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$이므로

$P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$

$= \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(2 \leq \overline{X} < 3) = P(\overline{X}=2)+P\left(\overline{X}=\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6}+\frac{2}{9} = \frac{7}{18}$

51) 답 ①

[해설] 첫 번째 뽑은 수를 X_1, 두 번째 뽑은 수를 X_2, 세 번째 뽑은 수를 X_3이라 하면

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$

$\overline{X}$의 최댓값이 1이므로 $P(\overline{X} \geq 1) = P(\overline{X}=1)$

$\overline{X}=1$인 경우는 $X_1=X_2=X_3=1$인 경우뿐이므로

$P(\overline{X} \geq 1) = P(\overline{X}=1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$

52) 답 ①

[해설] 모집단의 확률분포에서 확률의 총합이 1이므로

$a+a+b=1$에서 $2a+b=1$ ······ ㉠

한편, 첫 번째 뽑은 수를 X_1, 두 번째 뽑은 수를 X_2라 하면

$\overline{X} = \frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=4$인 경우 $X_1+X_2=8$을 만족시키는 X_1, X_2의 순서쌍 (X_1, X_2)는 $(3,\ 5)$, $(5,\ 3)$이므로

$P(\overline{X}=4) = a\times b+b\times a = 2ab$

$2ab = \frac{1}{4}$에서 $ab = \frac{1}{8}$ ······ ㉡

㉠에서 $b=1-2a$를 ㉡에 대입하면

$a(1-2a) = \frac{1}{8}$, $16a^2-8a+1=0$, $(4a-1)^2=0$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

$a-b = \frac{1}{4}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

53) 답 ④

[해설] $E(\overline{X}) = 100$, $V(\overline{X}) = \frac{10^2}{25} = 4 = 2^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(100, 2^2)$을 따르고, $Z = \frac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{X} \leq a) = P\left(\frac{\overline{X}-100}{2} \leq \frac{a-100}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-100}{2}\right)$

$= P\left(Z \geq \frac{100-a}{2}\right)$

$= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{100-a}{2}\right)$

$= 0.0668$

이므로 $P\left(0 \leq Z \leq \frac{100-a}{2}\right) = 0.4332$

따라서 $\frac{100-a}{2} = 1.5$이므로 $a = 97$

54) 답 36

[해설] 이 공장에서 생산하는 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(100,\ 9^2)$을 따른다.

제품 중에서 n개를 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X}) = 100$, $V(\overline{X}) = \frac{9^2}{n} = \left(\frac{9}{\sqrt{n}}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \left(\frac{9}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z = \dfrac{\overline{X}-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$P(\overline{X} \geq 97) = P\left(\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}} \geq \dfrac{97-100}{\frac{9}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{\sqrt{n}}{3}\right)$

$= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{3} \leq Z \leq 0\right)+0.5$

$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right)+0.5 = 0.9772$

이므로

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.4772$

$\frac{\sqrt{n}}{3} = 2$에서 $\sqrt{n} = 6$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 36이다.

55) 답 ⑤

[해설] 관광객 1명이 체류기간 동안 지출한 금액을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(500,\ 10^2)$을 따른다.

관광객 중 임의로 택한 4명이 체류기간 동안 지출한 금액의 평균을 확률변수 $\overline{Y}$라 하면

$E(\overline{Y})=E(Y)=500,\ V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{4}=\frac{100}{4}=25=5^2$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(500,5^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{Y}-500}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\overline{Y}=\frac{X}{4}$이므로

$$\begin{aligned}P(X\geq 1940)&=P(4\overline{Y}\geq 1940)=P(\overline{Y}\geq 485)\\&=P\left(\frac{\overline{Y}-500}{5}\geq\frac{485-500}{5}\right)\\&=P(Z\geq -3)\\&=P(-3\leq Z\leq 0)+0.5\\&=P(0\leq Z\leq 3)+0.5\\&=0.4987+0.5=0.9987\end{aligned}$$

56) 답 16

[해설] 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}$

$\overline{x}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=56.08,\ \overline{x}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=63.92$이므로

$\left(\overline{x}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}\right)-\left(\overline{x}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}\right)=63.92-56.08$

$2\times1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}=7.84$에서 $\sqrt{n}=\frac{2\times1.96\times8}{7.84}=4$

따라서 $n=16$이다.

57) 답 ④

[해설] 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$50-2.58\times\frac{10}{\sqrt{25}}\leq m\leq 50+2.58\times\frac{10}{\sqrt{25}}$

$50-2.58\times2\leq m\leq 50+2.58\times2$

$50-5.15\leq m\leq 50+5.16$

$44.84\leq m\leq 55.16$

58) 답 400

[해설] 크기가 n인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$\overline{x}-1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$

이므로

$b-a=2\times1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}$

$2\times1.96\times\frac{100}{\sqrt{n}}\leq 19.6$에서

$\sqrt{n}\geq 20$

양변을 제곱하면 $n\geq 400$

따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 400이다.

59) 답 ①

[해설] 임의추출한 100명 중에서 교과우수자전형을 통해 선발된 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면

$E(\hat{p})=0.2,\ V(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.04^2$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.2,\,0.04^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(\hat{p}\geq 0.32)=P\left(\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}\geq\frac{0.32-0.2}{0.04}\right)=P(Z\geq 3)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 3)$

$=0.5-0.4987$

$=0.0013$

[다른 풀이]

임의추출한 100명 중에서 교과우수자전형을 통해 선발된 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20,\ V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4^2$이고, 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 $100\times0.32=32$이므로 구하는 확률은

$P(X\geq 32)=P\left(\frac{X-20}{4}\geq\frac{32-20}{4}\right)=P(Z\geq 3)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 3)=0.5-0.4987=0.0013$

60) 답 ①

[해설] 임의추출한 400명 중에서 예약시간 전에 도착하는 고객의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면

$E(\hat{p})=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$

$V(\hat{p})=\frac{\frac{90}{100}\times\frac{10}{100}}{400}=\frac{9}{40000}=\left(\frac{3}{200}\right)^2$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $N\left(\frac{9}{10},\ \left(\frac{3}{200}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\frac{\hat{p}-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$P(0.885\leq\hat{p}\leq 0.915)$

$=P\left(\frac{0.885-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\leq\frac{\hat{p}-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\leq\frac{0.915-\frac{9}{10}}{\frac{3}{200}}\right)$

$=P(-1\leq Z\leq 1)$ $=2P(0\leq Z\leq 1)$

$=2\times0.3413=0.6826$

[다른 풀이]

임의추출한 400명 중에서 예약시간 전에 도착하는 고객의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(400,\ \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$E(X)=400\times\frac{9}{10}=360$

$V(X)=400\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=6^2$

이때 400은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-360}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$400\times0.885=354,\ \ 400\times0.915=366$이므로 구하는 확률은

$P(354\leq X\leq 366)$

$=P\left(\frac{354-360}{6}\leq\frac{X-360}{6}\leq\frac{366-360}{6}\right)$

$=P(-1\leq Z\leq 1)=2P(0\leq Z\leq 1)$

$=2\times0.3413=0.6826$

61) 답 588

[해설] 100명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\dfrac{90}{100}=\dfrac{9}{10}$

이 회사의 전체 직원 중 매일 커피를 마시는 직원의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{9}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{100}}\le p\le\frac{9}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{100}}$$

이므로

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}}{100}}=2\times1.96\times\frac{3}{100}$$

따라서 구하는 값은

$$5000(b-a)=5000\times2\times1.96\times\frac{3}{100}=196\times3=588$$

62) 답 ③

[해설] 100명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$

이 드라마의 시청률 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\frac{1}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}\le p\le\frac{1}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}$$

$$\frac{1}{10}-1.96\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}\le p\le\frac{1}{10}+1.96\times\frac{1}{10}\times\frac{3}{10}$$

$$\frac{10-5.588}{100}\le p\le\frac{10+5.88}{100}$$

$$0.0412\le p\le0.1588$$

63) 답 ④

[해설] 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\dfrac{1}{5}$

사건 A가 일어나는 비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{5}-2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}\le p\le\frac{1}{5}+2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}$$

이므로

$$c=2.58\times\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{25}}=2.58\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}$$

$$=2.58\times\frac{8}{100}=\frac{20.64}{100}$$

따라서 구하는 값은

$$10\hat{p}+100c=10\times\frac{1}{5}+100\times\frac{20.64}{100}=2+20.64=22.64$$

64) 답 ③

[해설] 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_1, 두 번째 꺼낸 공에 적힌 수를 X_2라 하면 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}=2$, 즉 $X_1+X_2=4$인 경우를 X_1, X_2의 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$로 나타내면 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$이므로

$$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{n+1}\times\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\times\frac{1}{n+1}=\frac{2n}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{3}{8}$$

$16n=3(n+1)^2$, $3n^2-10n+3=0$, $(3n-1)(n-3)=0$

$n=\dfrac{1}{3}$ 또는 $n=3$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 3이다.

65) 답 ⑤

[해설] 모평균이 10, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 4이므로

$$E(\overline{X})=10,\ \ V(\overline{X})=\frac{2^2}{4}=1$$

$$E(2\overline{X}+1)=2E(\overline{X})+1=2\times10+1=21$$

$$V(2\overline{X}+1)=2^2V(\overline{X})=2^2\times1=4$$

따라서 구하는 값은

$$E(2\overline{X}+1)+V(2\overline{X}+1)=21+4=25$$

66) 답 ③

[해설] 주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적힌 수를 확률변수 X라 하자.

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$E(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=\frac{16}{4}=4$$

$$V(X)=(1-4)^2\times\frac{1}{4}+(3-4)^2\times\frac{1}{4}+(5-4)^2\times\frac{1}{4}$$

$$+(7-4)^2\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{20}{4}=5$$

이므로 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{5}$

따라서 표본의 크기가 25이므로 $\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

67) 답 ②

[해설] 모집단이 정규분포 $N(30,4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 $E(\overline{X})=30$, $V(\overline{X})=\dfrac{4^2}{4}=4=2^2$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(30,\ 2^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

따라서 구하는 값은

$$P(\overline{X}\le32)=P\left(\frac{\overline{X}-30}{2}\le\frac{32-30}{2}\right)$$

$$=P(Z\le1)=0.5+P(0\le Z\le1)$$

$$=0.5+0.3413=0.8413$$

68) 답 ④

[해설] 확률변수 X가 정규분포 $N(100,\ 6^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-100}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$$P(X\le112)=P\left(\frac{X-100}{6}\le\frac{112-100}{6}\right)$$

$$=P(Z\le2)$$

…… ㉠

한편, $E(\overline{X})=100$, $V(\overline{X})=\dfrac{6^2}{9}=4=2^2$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(100,\ 2^2)$을 따르고 $Z=\dfrac{\overline{X}-100}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$$P(\overline{X}\ge a)=P\left(\frac{\overline{X}-100}{2}\ge\frac{a-100}{2}\right)$$

$$=P\left(Z\ge\frac{a-100}{2}\right)$$

…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{a-100}{2}=-2$

따라서 구하는 상수 a의 값은 96이다.

69) 답 ②

[해설] 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}$$

따라서 c의 값은

$$c=2.58\times\frac{5}{\sqrt{100}}=2.58\times\frac{1}{2}=1.29$$

70) 답 ④

[해설] $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{16}$에서 $\sqrt{n}\ge 4\sqrt{3}$

따라서 $n\ge 48$이므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 48이다.

71) 답 ③

[해설] 크기가 36인 표본을 임의추출하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}=\dfrac{1}{10}$

모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{1}{10}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}\le p\le\frac{1}{10}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}$$

이므로

$$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{36}}$$

$$=2\times1.96\times\frac{3}{10}\times\frac{1}{6}$$

$$=1.96\times\frac{1}{10}=0.196$$

72) 답 ③

[해설] $E(X)=2\times\dfrac{1}{8}+4\times\dfrac{3}{8}+6\times\dfrac{3}{8}+8\times\dfrac{1}{8}$

$$=\frac{40}{8}=5$$

$$V(X)=(2-5)^2\times\frac{1}{8}+(4-5)^2\times\frac{3}{8}+(6-5)^2\times\frac{3}{8}$$

$$+(8-5)^2\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{24}{8}=3$$

표본의 크기가 2이므로

$E(\overline{X})=E(X)=5,\ V(\overline{X})=\dfrac{V(X)}{2}=\dfrac{3}{2}$

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$이므로

$$\frac{3}{2}=E(\overline{X}^2)-5^2$$

$$E(\overline{X}^2)=\frac{3}{2}+25=\frac{53}{2}$$

73) 답 ①

[해설] 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\sigma^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$$P(|X-m|\le 9)=P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(|Z|\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$$=2P\left(0\le Z\le\frac{9}{\sigma}\right)$$

$2P\left(0\le Z\le\dfrac{9}{\sigma}\right)=0.9974$에서

$P\left(0\le Z\le\dfrac{9}{\sigma}\right)=0.4987$이므로 $\dfrac{9}{\sigma}=3,\quad \sigma=3$

즉, 확률변수 X는 정규분포 $N(m,3^2)$을 따른다.

또

$$P(X\le153)=P\left(\frac{X-m}{3}\le\frac{153-m}{3}\right)$$

$$=P\left(Z\le\frac{153-m}{3}\right)$$

$P\left(Z\le\dfrac{153-m}{3}\right)=0.8413$에서

$P\left(0\le Z\le\dfrac{153-m}{3}\right)=0.3413$이므로

$\dfrac{153-m}{3}=1,\ m=150$

확률변수 X는 정규분포 $N(150,3^2)$을 따르고, 임의추출한 통조림 9개의 무게의 평균 $\overline{X}$에 대하여

$$E(\overline{X})=150,\ V(\overline{X})=\frac{3^2}{9}=1$$

이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $N(150,1^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-150}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따르므로

$$P(\overline{X}\ge153)=P\left(\frac{\overline{X}-150}{1}\ge\frac{153-150}{1}\right)$$

$$=P(Z\ge3)=0.5-P(0\le Z\le3)$$

$$=0.5-0.4987=0.0013$$

74) 답 ③

[해설] 임의추출한 100명 중에서 아침식사를 거르고 등교하는 학생의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면 구하는 확률은

$P(0.07\le\hat{p}\le0.16)$이다.

$E(\hat{p})=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$,

$$V(\hat{p})=\frac{\frac{10}{100}\times\frac{90}{100}}{100}=\frac{9}{10000}=\left(\frac{3}{100}\right)^2$$

이므로 확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $N\left(\dfrac{1}{10},\left(\dfrac{3}{100}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\hat{p}-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$P(0.07\le\hat{p}\le0.16)$$

$$=P\left(\frac{0.07-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\le\frac{\hat{p}-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\le\frac{0.16-\frac{1}{10}}{\frac{3}{100}}\right)$$

$$=P(-1\le Z\le2)$$

$$=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)$$

$$=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)$$

$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

[다른 풀이]

임의추출한 100명 중에서 아침식사를 거르는 학생의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(100,\dfrac{1}{10}\right)$을 따른다.

$$E(X)=100\times\frac{1}{10}=10,$$

$V(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=3^2$

이고, 100은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(10,\,3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,1)$을 따른다.

$100\times 0.07=7,\quad 100\times 0.16=16$이므로 구하는 확률은

$$P(7\le X\le 16)=P\left(\frac{7-10}{3}\le\frac{X-10}{3}\le\frac{16-10}{3}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 2)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.3413+0.4772=0.8185$$

75) 답 25

[해설] n명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

A제품에 만족하는 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{4}{5}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}\le p\le\frac{4}{5}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$$

이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{n}}$$
$$=2\times 1.96\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\frac{4\times 1.96}{5\sqrt{n}}=0.3136$에서 $\sqrt{n}=5$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 $n=5^2=25$

76) 답 ①

[해설] ㄱ. $E(\overline{X})=m,\ E(\overline{Y})=m$이므로 $E(\overline{X})=E(\overline{Y})$ (참)

ㄴ. $E(\overline{X})=E(\overline{Y})=m$이고, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$을 따르고,

확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(m,\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}},\ \sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$이므로

$n_1<n_2$이면 $\sigma(\overline{X})>\sigma(\overline{Y})$이다.

$\sigma(\overline{X})>\sigma(\overline{Y})$이므로 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=g(x)$보다 중앙부분이 낮아지면서 옆으로 퍼진 모양이다.

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 작다. (거짓)

ㄷ. Z를 표준정규분포를 따르는 확률변수라 하면

$$P(m\le\overline{X}\le a)=P\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\le\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\le\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{a-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma}\right)$$

$$P(m\le\overline{Y}\le b)=P\left(\frac{m-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\le\frac{\overline{Y}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\le\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{b-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}}\right)$$
$$=P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}\right)$$

$P(m\le\overline{X}\le a)=P(m\le\overline{Y}\le b)$이므로

$\frac{\sqrt{n_1}(a-m)}{\sigma}=\frac{\sqrt{n_2}(b-m)}{\sigma}$

$\sqrt{n_1}(a-m)=\sqrt{n_2}(b-m)$에서

$0<a-m<b-m$이므로 $\sqrt{n_1}>\sqrt{n_2}$

즉, $n_1>n_2$ 이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

77) 답 749

[해설] $\overline{x}$를 이용하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{16}}$$

즉, $\overline{x}-0.49\le m\le\overline{x}+0.49$

모평균이 7이고, 모평균이 신뢰구간에 포함되므로

$\overline{x}-0.49\le 7\le\overline{x}+0.49$에서

$6.51\le\overline{x}\le 7.49$

따라서 $M=7.49$이므로 $100M=100\times 7.49=749$

78) 답 321

[해설] 400명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{n}{400}$

산책로 조성을 희망하는 주민의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$\frac{n}{400}-1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}\le p\le$$
$$\frac{n}{400}+1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}$$ 이므로

$$b-a=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}{400}}$$
$$=2\times 1.96\times\frac{1}{20}\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}$$
$$=0.196\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}$$

$0.196\times\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\ge 0.0588$에서

$\sqrt{\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)}\ge\frac{3}{10}$

양변을 제곱하면

$\frac{n}{400}\times\left(1-\frac{n}{400}\right)\ge\frac{9}{100}$

정리하면

$n^2-400n+14400\le 0,\quad (n-40)(n-360)\le 0$

$40\le n\le 360$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 $40,41,42,\cdots,360$이고 그 개수는 321이다.

79) [정답] ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+\frac{5}{4}-4a+a^3+\frac{2-a^2}{4}=1$에서

$4a^3-a^2-16a+4=0$

$(a-2)(a+2)(4a-1)=0$

$a=2$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

이때, $0\le\frac{5}{4}-4a\le1$, $0\le a^3\le1$, $0\le\frac{2-a^2}{4}\le1$이어야 하므로

$a=\frac{1}{4}$

80) [정답] ④

확률의 총합은 1이므로

$\sum_{k=1}^{10}\mathrm{P}(X=k)=1$에서

$\sum_{k=1}^{10}\frac{a}{1+2+3+\cdots+k}$

$=a\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=a\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}$

$=2a\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2a\sum_{k=1}^{10}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right]$

$=2a\left(1-\frac{1}{11}\right)$

$=\frac{20}{11}a$

$=1$

$\therefore a=\frac{11}{20}$

81) [정답] 4

$\mathrm{P}(X=1)=p$라 하면

$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{k}{2}\mathrm{P}(X=k)$이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}\times\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}p$

$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{2}p$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{2}\times\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{4}p$

확률의 총합은 1이므로

$p+\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p+\frac{3}{4}p=1 \qquad \therefore p=\frac{4}{11}$

$\therefore 11\mathrm{P}(X=1)=11\times\frac{4}{11}=4$

82) [정답] ①

남학생 4명과 여학생 3명을 사회자 1명, 찬성자 3명, 반대자 3명으로 나누는 전체 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3$이고, 찬성자 3명 중에서 여학생의 수가 확률변수 X이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

$\mathrm{P}(0\le X\le1)=\mathrm{P}(X=1)$이므로

(i) $X=0$인 경우

남학생 4명 중에서 3명이 찬성자이므로

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4C_3\times{}_4C_1}{{}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3}=\frac{16}{140}$

(ii) $X=1$인 경우

여학생 3명 중에서 1명이 찬성자이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_3}=\frac{72}{140}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(0\le X\le1)=\frac{16}{140}+\frac{72}{140}=\frac{88}{140}=\frac{22}{35}$

83) [정답] ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이므로

(i) $X=3$인 경우

주사위는 2 이하의 눈이 나오고 주머니 A에서 임의로 동시에 뽑은 2장의 카드에 적힌 수가 1, 5이거나 주사위는 3 이상의 눈이 나오고 주머니 B에서 임의로 동시에 뽑은 2장의 카드에 적힌 수가 2, 4이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

(ii) $X=5$인 경우

주사위는 3 이상의 눈이 나오고 주머니 B에서 임의로 동시에 뽑은 2장의 카드에 적힌 수가 4, 6이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{2}{9}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

84) [정답] ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값이 1, 2, 3, 4이므로 확률질량함수의 성질에 의하여

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\frac{1}{10k}+\frac{4}{10k}+\frac{9}{10k}+\frac{16}{10k}=1$

$\frac{30}{10k}=1$

$\therefore\ k=3$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{16}{30}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{4}{30}+3\times\frac{9}{30}+4\times\frac{16}{30}$

$=\frac{100}{30}=\frac{10}{3}$

85) [정답] ①

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{9}+a+\frac{1}{2}+b=1$에서

$a+b=\frac{7}{18}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X)=\frac{11}{2}$ 이므로

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{9}+3a+6\times\frac{1}{2}+9b=\frac{11}{2}$ 에서

$3a+9b=\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{6},\ b=\frac{2}{9}$

$\therefore\ 2a+3b=2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{9}$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

86) [정답] ③

세 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$\mathrm{P}(X=-1)=a,\ \mathrm{P}(X=0)=b,\ \mathrm{P}(X=1)=c$ 라 하면

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	계	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	1	1

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X)$ 이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$ 에서

$\{\mathrm{E}(X)\}^2=0$, 즉 $\mathrm{E}(X)=0$

$\mathrm{E}(X)=-a+c$이므로 $a=c$

한편 $\mathrm{E}(X)=0$이고 $\mathrm{E}(X^2)=a+c=2a$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2a$

$\sigma(X)=\frac{2}{3}$ 이므로

$2a=\frac{4}{9}$ …… ㉠

확률의 총합은 1이므로 $a+b+c=1$에서

$2a+b=1$

$\therefore\ b=1-2a=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \mathrm{P}(X=0)=\frac{5}{9}$

87) [정답] ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{9}{20}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+4\times\frac{9}{20}+9\times\frac{1}{20}$

$=\frac{54}{20}=\frac{27}{10}$

88) [정답] ⑤

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 10, 15, 20이고 각각의

확률은 $\frac{20}{50}=\frac{2}{5},\ \frac{20}{50}=\frac{2}{5},\ \frac{10}{50}=\frac{1}{5}$ 이다.

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	10	15	20	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{2}{5}+15\times\frac{2}{5}+20\times\frac{1}{5}=14$

$\mathrm{E}(X^2)=100\times\frac{2}{5}+225\times\frac{2}{5}+400\times\frac{1}{5}=210$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=210-196=14$

89) [정답] ④

$f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면

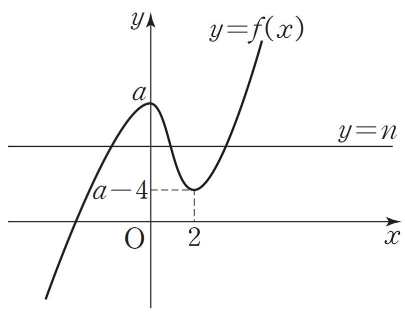
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$, $x=2$에서 극솟값 $f(2)=a-4$를 갖는다.



확률변수 X가 가질 수 있는 값은 a의 값에 따라 다르다.

(ⅰ) $1<a<10$인 경우

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 극댓값 $f(0)=a$와 극솟값 $f(2)=a-4$가 모두 1이상 6이하일 때,

즉 a가 5 또는 6일 때,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{6}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{6}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{3}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

따라서 a의 값은 5 또는 6이다.

또한 a가 $5-k$ 또는 $6+k$ $(k=1,\ 2,\ 3)$일 때,

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{1+k}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{4-k}{6}$

이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1+k}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{4-k}{6}=\frac{15-2k}{6}$이다.

즉, $\frac{15-2k}{6}=\frac{7}{3}$에서 $k=\frac{1}{2}$이므로

$1<a\leq 4$ 또는 $7\leq a<10$인 a의 값은 없다.

(ⅱ) $a=1$ 또는 $a=10$인 경우

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2이고

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{5}{6}+2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

따라서 a의 값은 1도 아니고 10도 아니다.

(ⅲ) $a>10$인 경우

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1이고

$\mathrm{P}(X=1)=1$이므로 $\mathrm{E}(X)=1\times1=1$

따라서 $a>10$인 a의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$5+6=11$

90) [정답] ②

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0}{8}=\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1}{8}=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{8}=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{8}=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}$

$=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X-1)=2\mathrm{E}(X)-1$

$=2\times\frac{3}{2}-1=2$

91) [정답] ②

$\mathrm{E}(2X-1)=1$에서

$2\mathrm{E}(X)-1=1$ $\quad\therefore\ \mathrm{E}(X)=1$

$\mathrm{E}(X)=1$이고 $\mathrm{E}((x-1)^2)=\mathrm{V}(X)$이므로

$\mathrm{V}(X)=4$이다.

$\therefore\ \mathrm{V}(1-2X)=4\mathrm{V}(X)=4\times4=16$

92) [정답] ②

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{2}{9}+b+2b=1$에서

$a+3b=\frac{7}{9}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X)=1$이므로

$-a+b+4b=1$에서

$-a+5b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\frac{1}{9}$, $b=\frac{2}{9}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=1\times\frac{1}{9}+0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{2}{9}+4\times\frac{4}{9}=\frac{19}{9}$

이고 $\mathrm{E}(X)=1$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{19}{9}-1=\frac{10}{9}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\frac{10}{19}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$이므로

$\sigma(3X+\sqrt{2})=3\sigma(X)$

$=3\times\frac{\sqrt{10}}{3}=\sqrt{10}$

93) [정답] ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 100, 500, 600이고, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	100	500	600	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{2}=450$

$\therefore\ \mathrm{E}(4X+100)=4\mathrm{E}(X)+100=4\times450+100=1900$

94) [정답] 25

자신의 번호보다 큰 번호를 가진 학생과 악수한 횟수는 1번 학생은 $(n-1)$번, 2번 학생은 $(n-2)$번, $\cdots$, n번 학생은 0번이므로 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$이다.

$\mathrm{P}(X=x)=\dfrac{1}{n}\,(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{n}$	1

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$
$$=\frac{n-1}{2}$$

$\mathrm{E}(X)=8$ 이므로 $\dfrac{n-1}{2}=8$ $\quad\therefore\ n=17$

$$\therefore\ \mathrm{E}(X+n)=\mathrm{E}(X+17)=\mathrm{E}(X)+17$$
$$=8+17=25$$

95) [정답] ①

가로줄 2개와 세로줄 2개를 임의로 선택하여 이 선분들로 둘러싸인 사각형을 만들 때, 만들 수 있는 모든 사각형의 개수는

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$

사각형 와 같이 넓이가 1인 사각형의 개수는 4이고,

사각형 또는 와 같이 넓이가 2인 사각형의 개수는 4이고,

사각형 와 같이 넓이가 4인 사각형의 개수는 1이다.

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4이고 각각의 확률이 $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{1}{9}$ 이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{1}{9}$	1

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}+4\times\frac{1}{9}=\frac{16}{9}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=1\times\frac{4}{9}+4\times\frac{4}{9}+16\times\frac{1}{9}=\frac{36}{9}=4$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2=4-\frac{256}{81}=\frac{68}{81}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(9\mathrm{X}+10)=81\mathrm{V}(X)$$
$$=81\times\frac{68}{81}=68$$

96) [정답] ②

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=r)={}_{50}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{5}\right)^r\left(\frac{4}{5}\right)^{50-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 50)$$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따른다.

$$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{1}{5}=10,\ \mathrm{V}(X)=50\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=8$$

$$\sum_{r=0}^{50}(r^2-r)\mathrm{P}(X=r)=\sum_{r=0}^{50}r^2\mathrm{P}(X=r)-\sum_{r=0}^{50}(r)\mathrm{P}(X=r)$$
$$=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)$$
$$=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2-\mathrm{E}(X)$$
$$=8+100-10=98$$

97) [정답] ④

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=np$이고 $\mathrm{V}(X)=np(1-p)$이다.

$\mathrm{E}(3X)=3\mathrm{E}(X)$이므로

$\mathrm{E}(3X)=4\mathrm{V}(X)$에서

$3np=4np(1-p)$

n은 자연수이고 $0<p<1$이므로

$1-p=\dfrac{3}{4}$ $\quad\therefore\ p=\dfrac{1}{4}$

98) [정답] ①

국내 항공사 비행기를 이용한 사람의 비율은 0.65이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(100,\ 0.65)$를 따른다.

$\mathrm{V}(X)=100\times0.65\times0.35=22.75$이므로

$\mathrm{V}(2X+9)=4\mathrm{V}(X)=4\times22.74=91$

99) [정답] ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4n}{25}$$

$$\mathrm{V}(\sqrt{5}X)=5\mathrm{V}(X)=5\times\frac{4n}{25}=\frac{4n}{5}$$

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(40,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=40\times p=40p$

$\mathrm{V}(\sqrt{5}X)=\mathrm{E}(Y)$이므로

$\dfrac{4n}{5}=40p$ $\quad\therefore\ n=50p$ ⋯⋯ ㉠

n은 자연수이고 $0<p<1$이므로 ㉠을 만족시키는 순서쌍 $(n,\ p)$는 $\left(1,\ \dfrac{1}{50}\right)$, $\left(2,\ \dfrac{2}{50}\right)$, $\left(3,\ \dfrac{3}{50}\right)$, $\cdots$, $\left(49,\ \dfrac{49}{50}\right)$이다.

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(n,\ p)$의 개수는 49이다.

100) [정답] ④

이 매점에서 판매된 음료수 중에서 캔 음료수의 비율은 0.3이고

이 매점에서 판매된 캔 음료수 중에서 분리 수거된 캔 음료수의 비율은 0.75이므로 이 매점에서 판매된 음료수 중에서 분리 수거된 캔 음료수의 비율은

$$\frac{3}{10}\times\frac{75}{100}=\frac{9}{40}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(200,\ \dfrac{9}{40}\right)$를 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{E}(X)=200\times\frac{9}{40}=45$$

101) [정답] ③

ㄱ. $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n} r_n\mathrm{C}_r$에서

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r\frac{1}{2^n}$$
$$=\sum_{r=0}^{n} r\,{}_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\sum_{r=0}^{n} r_n\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}$$

이고 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로 $p=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{E}(2X)=2\mathrm{E}(X)=2\times\frac{n}{2}=n$ (참)

ㄷ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(2X)=4\mathrm{V}(X)=4\times\frac{n}{4}=n=\mathrm{E}(2X)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

102) [정답] ④

주어진 그래프로부터

$f(x)=\frac{1}{k^3}x+\frac{1}{k^2}\ (-k\le x\le 2k)$

확률밀도함수의 성질에 의하여 $\mathrm{P}(-k\le X\le 2k)=1$이고,

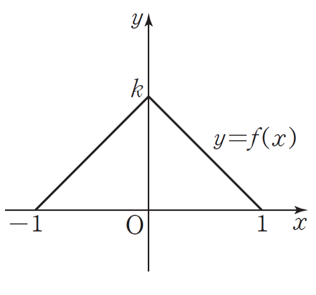
$f(2k)=\frac{3}{k^2}$이므로

$\frac{1}{2}\times 3k\times\frac{3}{k^2}=1$에서 $\frac{9}{2k}=1$

$\therefore\ k=\frac{9}{2}$

103) [정답] ④

확률밀도함수 $f(x)=-k|x|+k$의 그래프는 그림과 같다.



확률밀도함수의 성질에 의하여 $\int_{-1}^{1}(-k|x|+k)dx=1$이므로

$\frac{1}{2}\times 2\times k=1$

$\therefore\ k=1$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(2|X|\le k)=\mathrm{P}\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-|x|+1)dx$$
$$=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}(-x+1)dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=2\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$$

104) [정답] ⑤

확률밀도함수의 성질에 의하여

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=1,\ \int_{-2}^{2}g(x)dx=1$이고

$f(x)=g(-x)$이므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 서로 대칭이다.

$\int_{0}^{2}g(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx$이므로

$$\mathrm{P}(0\le X\le 2)+\mathrm{P}(0\le Y\le 2)$$
$$=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx$$
$$=\int_{0}^{2}f(x)dx+\int_{-2}^{0}f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}f(x)dx$$
$$=1$$

105) [정답] ②

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-50}{\sigma}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X\le 80)-\mathrm{P}(X\le 50+\sigma)$$
$$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{80-50}{\sigma}\right)-\left\{0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{50+\sigma-50}{\sigma}\right)\right\}$$
$$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.1359$$

에서

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)=0.1359+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$$
$$=0.1359+0.3413$$
$$=0.4772$$

이므로

$$\frac{30}{\sigma}=2$$

$\therefore\sigma=15$

106) [정답] ③

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ 을 따른다.

$\mathrm{P}(X \le 2m) = \mathrm{P}(X \le m) + \mathrm{P}(m \le X \le 2m)$
$= 0.5 + \mathrm{P}(m \le X \le 2m)$
$= 0.8413$

$\mathrm{P}(m \le X \le 2m) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{m}{\sigma}\right) = 0.3413\Big\}$이고,

주어진 표에서 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\dfrac{m}{\sigma} = 1$, 즉 $m = \sigma$

$\mathrm{P}(2X \le m) = \mathrm{P}\left(X \le \dfrac{m}{2}\right)$
$= \mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{1}{2}\right)$
$= 0.5 - \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{1}{2}\right)$
$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$

107) [정답] ④

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 5^2)$ 을 따르고,
확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(210,\ \sigma^2)$ 을 따르므로
표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ 을 따르는 확률변수를 Z라 하면
$\mathrm{P}(X \le 190) = \mathrm{P}(Y \ge 190)$ 에서

$\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{190-180}{5}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{190-210}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Z \le 2) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{-20}{\sigma}\right)$

$0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.5 + \mathrm{P}\left(\dfrac{-20}{\sigma} \le Z \le 0\right)$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{20}{\sigma}\right)$

$\dfrac{20}{\sigma} = 2$

$\therefore \sigma = 10$

108) [정답] ②

로봇청소기가 한번 충전으로 청소할 수 있는 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(120,\ 10^2)$ 을 따르므로

$Z = \dfrac{X-120}{10}$ 은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ 을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge a) = 0.8413$ 에서

$\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{a-120}{10}\right) = 0.5 + 0.3413$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a-120}{10} \le Z \le 0\right) + 0.5 = 0.5 + 0.3413$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le -\dfrac{a-120}{10}\right) = 0.3413$

따라서 $-\dfrac{a-120}{10} = 1$ 이므로

$a = 110$

109) [정답] ②

이 학생이 버스를 이용하여 등교하는데 걸리는 시간(분)을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 10^2)$ 을 따르고, 자전거를 이용하여 등교하는데 걸리는 시간(분)을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(36,\ 2^2)$ 을 따른다.
표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$ 을 따르는 확률변수를 Z라 하면 등교하는데 걸리는 시간이 40분을 넘기면 8시에 집에서 출발한 이 학생은 지각하므로

(ⅰ) 버스를 이용했을 때

임의로 버스를 이용할 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 버스를 이용하여 등교했을 때 지각할 확률은

$\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(X > 40)$
$= \dfrac{1}{2}\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{40-30}{10}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(Z > 1)$
$= \dfrac{1}{2}\{0.5 - \mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le 1)\}$
$= \dfrac{1}{2}\{0.5 - 0.3413\}$
$= \dfrac{1}{2} \times 0.1587$
$= 0.07935$

(ⅱ) 자전거를 이용했을 때

임의로 자전거를 이용할 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로 자전거를 이용하여 등교했을 때 지각할 확률은

$\dfrac{1}{2}\mathrm{P}(Y > 40)$
$= \dfrac{1}{2}\mathrm{P}\left(Z > \dfrac{40-36}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\mathrm{P}(Z > 2)$
$= \dfrac{1}{2}\{0.5 - \mathrm{P}(0 \le \mathrm{Z} \le 2)\}$
$= \dfrac{1}{2}\{0.5 - 0.4772\}$
$= \dfrac{1}{2} \times 0.0228 = 0.0114$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 버스를 이용하여 등교했을 때 지각한 사건과 자전거를 이용하여 등교했을 때 지각한 사건은 서로 배반사건이므로 이 학생이 지각했을 확률은
$0.07935 + 0.0114 = 0.09075 \fallingdotseq 0.0908$

110) [정답] ①

이 고등학교 학생이 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽었을 확률이 $0.6 = \dfrac{3}{5}$이므로 임의추출한 학생 150명 중에서 지난 6개월 동안 2권 이상의 책을 읽은 학생 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따른다.

이때, 150은 충분히 큰 수이고

$\mathrm{E}(X) = 150 \times \dfrac{3}{5} = 90$, $\mathrm{V}(X) = 150 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = 36$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(90,\ 6^2)$을 따르며

$Z = \dfrac{X-90}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \ge 102) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{102-90}{6}\right)$
$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

111) [정답]

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{2}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{2}{3}=108$. $\mathrm{V}(X)=162\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=36$이고,

162는 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(108,\ 6^2\right)$을 따르며 $Z=\frac{X-108}{6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\le 117)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{117-108}{6}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\le 1.5)\\&=0.5+P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5+0.4332=0.9332\end{aligned}$$

112) [정답] ②

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5 이상의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$ $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$ 이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$ 이므로

$\frac{2n}{9}+\frac{n^2}{9}=40$

$n^2+2n=360,\ n^2+2n-360=0$

$(n-18)(n+20)=0$

$\therefore n=18$ ($\because n$은 자연수)

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$

$\mathrm{E}(X)=6,\ \mathrm{V}(X)=4$이다.

18은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(6,\ 2^2\right)$을 따르며 $Z=\frac{X-6}{2}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\ge 9)&=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{9-6}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=0.5-P(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

113) [정답] ①

이 지역에 있는 자동차에 하이패스가 있을 확률이 $0.2=\frac{1}{5}$이므로 임의로 추출한 자동차 100대 중에서 하이패스가 있는 자동차의 대수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

이때, 100은 충분히 큰 수이고

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{5}=20$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ 4^2\right)$을 따르며

$Z=\frac{X-20}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge n)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{n-20}{4}\right)=0.0228$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{n-20}{4}\right)=0.0228$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{n-20}{4}\right)=0.4772$

따라서 $\frac{n-20}{4}=2$이므로

$n=28$

114) [정답] ④

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$ 이므로

$\mathrm{E}(2\overline{X}-1)=2\mathrm{E}(\overline{X})-1=2m-1=15$에서

$m=8$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{n}$ 이므로

$\mathrm{V}(4\overline{X}+1)=16\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{64}{n}=1$에서

$n=64$

$\therefore m+n=8+64=72$

115) [정답] ⑤

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{2}=\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=1\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{3}+9\times\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2\\&=6-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}=\frac{1}{9}$

116) [정답] ⑤

확률의 총합이 1이므로 $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+a=1$에서

$a=\frac{1}{2}$

모집단의 평균과 분산을 구하면

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{2}=4$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2\\&=0\times\frac{1}{6}+9\times\frac{1}{3}+36\times\frac{1}{2}-4^2=5\end{aligned}$$

크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 분산

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{5}{4}$

$\therefore \mathrm{E}(\overline{X})+\mathrm{V}(\overline{X})=4+\frac{5}{4}=\frac{21}{4}$

117) [정답] 79

첫 번째, 두 번째, 세 번째 카드에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하자.

$\overline{X}=\frac{10}{3}$인 경우는 $a+b+c=10$이므로 세 수 a, b, c를 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$로 나타내면

(ⅰ) $(2,\ 2,\ 6)$일 확률이

$\frac{2}{12}\times\frac{2}{12}\times\frac{6}{12}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$

이므로 $(2,\ 2,\ 6)$ 또는 $(2,\ 6,\ 2)$ 또는 $(6,\ 2,\ 2)$

$3\times\frac{1}{72}=\frac{1}{24}$

(ⅱ) $(2,\ 4,\ 4)$일 확률이

$\frac{2}{12}\times\frac{4}{12}\times\frac{4}{12}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{54}$

이므로 $(2,\ 4,\ 4)$ 또는 $(4,\ 2,\ 4)$ 또는 $(4,\ 4,\ 2)$

$3\times\frac{1}{54}=\frac{1}{18}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{10}{3}\right)=\frac{1}{24}+\frac{1}{18}=\frac{7}{72}$

따라서 $p=72$, $q=7$이므로

$p+q=79$

118) [정답] ①

세 수 a, b, c가 이 순서대로 공비가 1보다 작은 등비수열을 이루므로

$b^2=ac$ …… ㉠

$a>b>c$ …… ㉡

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{8}+a+b+c=1$

$a+b+c=\frac{7}{8}$

주어진 조건에서

$64abc=1$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$64b^3=1$에서 $b=\frac{1}{4}$이므로

$ac=\frac{1}{16}$ …… ㉣

$a+c=\frac{5}{8}$ …… ㉤

㉣, ㉤에서

$a=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{8}$ ($\because$㉡)

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}+8\times\frac{1}{8}$

$=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0\times\frac{1}{8}+2^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{4}-8^2\times\frac{1}{8}-3^2$

$=14-9=5$

따라서 표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}=\frac{5}{5}=1$

119) [정답]

공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하고, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	$\cdots$	$2n-1$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$	1

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\frac{1}{n}$

$=\frac{1}{n}\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}=n$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2\frac{1}{n}-n^2$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)-n^2$

$=\frac{1}{n}\left\{4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}-n^2$

$=\frac{2(n+1)(2n+1)}{3}-2(n+1)+1-n^2$

$=\frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{3}$

$=\frac{n^2-1}{3}$

표본평균의 분산이 10이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{\frac{n+1}{3}}=10$에서

$\frac{\frac{n^2-1}{3}}{\frac{n+1}{3}}=10,\quad \frac{\frac{(n+1)(n-1)}{3}}{\frac{n+1}{3}}=10$

$\frac{n+1}{3}$이 자연수이므로

$n-1=10$

$\therefore n=11$

120) [정답] ④

정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 1)$을 따르며,

$Z=\frac{\overline{X}-10}{1}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(8\le\overline{X}\le 11)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{8-10}{1}\le Z\le\frac{11-10}{1}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

121) [정답] ④

모집단의 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 36)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \left(\frac{6}{\sqrt{9}}\right)^2\right)$, 즉

$\mathrm{N}(100,\ 4)$을 따른다.

표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하면

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq a) \geq \mathrm{P}(X \leq 118)$에서

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-100}{a}\right) \geq \mathrm{P}\left(Z \leq \frac{118-100}{6}\right)$

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-100}{2}\right) \geq \mathrm{P}(Z \leq 3)$

$\frac{a-100}{2} \leq -3$

$\therefore a \leq 94$

따라서 실수 a의 최댓값은 94이다.

122) [정답]

이 지역에 있는 주유소 한 곳의 휘발유 1L 당 가격을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(1800,\ 60^2)$을 따르므로 크기가 16인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(1800,\ 15^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-1800}{15}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(1785 \leq \overline{X} \leq 1815)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{1785-1800}{15} \leq Z \leq \frac{1815-1800}{15}\right)$

$=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 1)$

$=2\times\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

123) [정답] ③

이 회사에서 생산되는 야구공 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(145,\ 4^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(145,\ \left(\frac{4}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-145}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(143 \leq \overline{X} \leq 147)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{143-145}{\frac{4}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{147-145}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$

$=0.9544$

주어진 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 2)=2\times\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.9544$

이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=2 \qquad \therefore n=16$

124) [정답] ②

이 과수원에서 재배한 사과 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(294,\ 12^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(294,\ 4^2)$을 따른다.

사과가 9개 들어 있는 한 박스의 무게가 2.7kg 이상이면 특별 상품으로 판매하므로 한 박스에 들어 있는 사과 1개의 무게의 평균은 300g 이상이어야 한다.

$Z=\frac{\overline{X}-294}{4}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq 300)$

$=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{300-294}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \geq 1.5)$

$=0.5-P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

125) [정답] ②

표본의 크기 $n=16$, 표본평균 $\overline{x}=100$이고, 모표준편차 $\sigma=8$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[100-1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}, 100+1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}\right]$

$\therefore [96.08,\ 103,92]$

126) [정답]

표본의 크기 $n=36$, 표본평균 $\overline{x}=70$이고, 표본의 크기가 충분히 크므로 표본표준편차를 모표준편차 대신 이용할 수 있다.

즉 $\sigma \fallingdotseq s=3$이므로 이 학교 학생 전체의 허리둘레의 평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[70-1.96\times\frac{3}{\sqrt{36}}, 70+1.96\times\frac{3}{\sqrt{36}}\right]$

$\therefore [69.02,\ 70.98]$

127) [정답] ①

표본평균이 $\overline{x}$이면 표본의 크기가 n, 모표준편차 $\sigma=6$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\overline{x}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\right]$이다.

$\beta-\alpha \leq 3.92$에서

$2\times1{,}96\times\frac{6}{\sqrt{n}} \leq 3.92$이므로

$\frac{6}{\sqrt{n}} \leq 1$

즉, $\sqrt{n} \leq 6$이므로 $n \geq 36$

따라서 자연수 n의 최솟값은 36이다.

128) [정답] 900

[풀이] 모표준편차를 σ라 하면

$\sigma=\frac{1}{3}$이므로 $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{3\sqrt{n}}$

따라서 $\frac{1}{3\sqrt{n}} \leq \frac{1}{90}$이기 위해서는 $n \geq 900$이어야 하므로

n의 최솟값은 900이다.

129) [정답] ③

[풀이] $\mathrm{E}(\overline{X})=m$이므로

$\mathrm{E}(3\overline{X}+1)=3\mathrm{E}(\overline{X})+1=3m+1=16$에서 $m=5$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{25}$이므로

$\mathrm{V}(3\overline{X}+1)=9\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{9}{25}\sigma^2=36$에서 $\sigma^2=100$, 즉 $\sigma=10$

$\therefore\ m+\sigma=15$

130) **[정답]** ③

[풀이] 모집단의 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=6,\ \mathrm{V}(X)=2,\ \sigma(X)=\sqrt{2}$

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X_1})=\mathrm{E}(\overline{X_2})=\mathrm{E}(X)=6$ (참)

ㄴ. $\mathrm{V}(2\overline{X_1})=4\mathrm{V}(\overline{X_1})=4\times\dfrac{\mathrm{V}(X)}{2}=4\times\dfrac{2}{2}=4$

$\mathrm{V}(3\overline{X_2})=9\mathrm{V}(\overline{X_2})=9\times\dfrac{\mathrm{V}(X)}{3}=9\times\dfrac{2}{3}=6$(거짓)

ㄷ .

$\sigma(\sqrt{2}\,\overline{X_1}-2)=\sqrt{2}\,\sigma(\overline{X_1})=\sqrt{2}\times\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\sigma(\sqrt{3}\,\overline{X_2}-3)=\sqrt{3}\,\sigma(\overline{X_2})=\sqrt{3}\times\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

131) **[정답]** ①

[풀이] 이 모집단에서 크기가 3인 표본을 복원추출할 때 $\overline{X}=2$인 경우는 2를 세 번 추출하는 경우와 1, 2, 3을 각각 한 번씩 추출하는 경우이다.

(i) 2를 세 번 추출할 확률 : $\{\mathrm{P}(X=2)\}^3=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

(ii) 1, 2, 3을 각각 한 번씩 추출할 확률 :

$3!\times\mathrm{P}(X=1)\times\mathrm{P}(X=2)\times\mathrm{P}(X=3)$

$=6\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}$

(i), (ii)에서 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{5}{16}$

132) **[정답]** ③

[풀이] 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 9)$를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 1)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-15}{1}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(14\le\overline{X}\le17)&=\mathrm{P}\left(\frac{14-15}{1}\le Z\le\frac{17-15}{1}\right)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

133) **[정답]** 97

[풀이] 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(|\overline{X}-m|\le\frac{\sigma}{5}\right)&=\mathrm{P}\left(m-\frac{\sigma}{5}\le\overline{X}\le m+\frac{\sigma}{5}\right)\\&=\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\\&=2\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.95\end{aligned}$$

이면 $\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.475$이므로 $\dfrac{\sqrt{n}}{5}\ge1.96$이어야 한다.

따라서 $\sqrt{n}\ge9.8$, 즉 $n\ge96.04$이므로 자연수 n의 최솟값은 97이다.

134) **[정답]** ⑤

[풀이] 모집단 P의 확률변수를 X, 모집단 Q의 확률변수를 Y라 하면 $\mathrm{E}(X)=15,\ \mathrm{V}(X)=16,\ \mathrm{E}(Y)=12,\ \mathrm{V}(Y)=4$이다.

ㄱ. $\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=15,\ \mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=12$ (거짓)

ㄴ. $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{100}=\dfrac{16}{100}=0.16$

$\mathrm{V}(\overline{Y})=\dfrac{\mathrm{V}(Y)}{25}=\dfrac{4}{25}=0.16$ (참)

ㄷ. 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르는 확률변수를 Z라 하자.

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 0.4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge15.4)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{15.4-15}{0.4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge1)$

표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 0.4^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le11.6)=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{11.6-12}{0.4}\right)=\mathrm{P}(Z\le-1)$

$\mathrm{P}(Z\ge1)=\mathrm{P}(Z\le-1)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge15.4)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le11.6)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

135) **[정답]** ③

[풀이] 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ t^2)$을 따르므로

$G(t)=\mathrm{P}(X\ge11)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{1}{t}\right)$

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10,\ \dfrac{t^2}{16}\right)$을 따르므로

$H(t)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge11)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{4}{t}\right)$

ㄱ. $G(1)=\mathrm{P}(Z\ge1)$ (참)

ㄴ. $G(4)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{1}{4}\right)$, $H(1)=\mathrm{P}(Z\ge4)$이므로

$G(4)\ne H(1)$ (거짓)

ㄷ. $$\begin{aligned}H(4)&=\mathrm{P}(Z\ge1)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.3413\\&=0.1587\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2H(2)&=2\mathrm{P}(Z\ge2)\\&=2\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le2)\}\\&=2(0.5-0.4772)\\&=0.0456\end{aligned}$$

이므로 $H(4)>2H(2)$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

136) **[정답]** ①

[풀이] 이 고등학교 3학년 학생의 1학기 중간고사 수학점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(74,\ 14^2)$을 따르므로 크기가 49인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(74,\ 2^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-74}{2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{P}(\overline{X}\ge80)&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{80-74}{2}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge3)\\&=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

137) **[정답]** ②

[풀이] 이 회사에서 생산되는 비누 1개의 무게를 확률변수 X라

하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 3^2)$을 따르므로 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따르고,

$Z=\dfrac{\overline{X}-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 이때

$$\mathrm{P}(98\le \overline{X}\le 103)=\mathrm{P}\left(\frac{98-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le \frac{103-100}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{-2\sqrt{n}}{3}\le Z\le \sqrt{n}\right)=0.9759$$

이고 $\left|-\frac{2\sqrt{n}}{3}\right|\le|\sqrt{n}|$이다. 표준정규분포에 의하면

$$\mathrm{P}(-2\le Z\le 3)=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)+\mathrm{P}(0\le Z\le 3)$$
$$=0.4772+0.4987$$
$$=0.9759$$

이므로 $\sqrt{n}=3$, 즉 $n=9$이다.

138) [정답] ②

[풀이] 이 상자에 들어 있는 제품 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 3^2)$을 따르므로 이 상자에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 0.6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-40}{0.6}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(39.1\le \overline{X}\le 40.9)=\mathrm{P}\left(\frac{39.1-40}{0.6}\le Z\le \frac{40.9-40}{0.6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 1.5)$$
$$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$$
$$=2\times 0.4332$$
$$=0.8664$$

139) [정답] ④

[풀이] 이 병원에서 출산한 산모의 임신기간의 모평균을 m이라 하면 모집단의 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따른다. 이 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균이 270일 이므로 신뢰도 95%로 추정한 모평균의 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[270-1.96\times\frac{10}{5},\ 270+1.96\times\frac{10}{5}\right]$$

$\therefore\ c=1.96\times 2=3.92$

140) [정답] 804

[풀이]

모집단의 표본편차를 σ, 이 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X_1}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 $\left[\overline{X_1}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X_1}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

이므로 $b-a=2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

같은 크기의 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{X_2}$라 하면 모평균에 대한 신뢰도 p%의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X_2}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X_2}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$\left(\text{단, } \mathrm{P}(0\le Z\le k)=\frac{1}{2}\times\frac{p}{100}\right)$

이므로 $d-c=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$b-a=2(d-c)$이므로

$$2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times 2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore\ k=1.29$

이때 표준정규분포표에 따르면

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.29)=0.402=\frac{p}{200}$

$\therefore\ 10p=10\times 200\times 0.402=804$

141) **정답** ②

확률의 총합은 1이므로 $c+2c+3c+\ \cdots\ +nc=1$에서

$c(1+2+3+\ \cdots\ +n)=\dfrac{n(n+1)c}{2}=1$ 따라서

$c=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{n}x\times cx=c\sum_{x=1}^{n}x^2$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$$
$$\mathrm{E}(X^2)=\sum_{x=1}^{n}x^2\times cx=c\sum_{x=1}^{n}x^3=\frac{2}{n(n+1)}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{n(n+1)}{2}-\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{9n^2+9n-2(4n^2+4n+1)}{18}=\frac{n^2+n-2}{18}$$

$\mathrm{V}(X)=1$에서 $\dfrac{n^2+n-2}{18}=1$, $n^2+n-20=0$

$(n+5)(n-4)=0$, n은 자연수이므로 $n=4$

142) **정답** ③

1회의 시행에서 검은 공이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{18}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ (단, $x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 18$)

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$, $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$

따라서 $\sigma(-3X+2)=|-3|\sigma(X)=3\times 2=6$

143) **정답** 768

확률변수 X가 가지는 값이 2, 2^2, 2^3, $\cdots$, 2^9, 2^{10}이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^9	2^{10}	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^9$	a	1

확률의 총합이 1이므로

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^9+a=1$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\frac{1}{2}}+a=1 \quad , \quad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^9+a=1$$ 따라서

$a=\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\left(\frac{1}{2}\right)+(2^2)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2^3)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$

$+\ \cdots\ +(2^9)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^9+(2^{10})^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^9$

$=(2+2^2+2^3+\ \cdots\ +2^9)+2^{11}$

$=\frac{2(2^9-1)}{2-1}+2^{11}=2^{11}+2^{10}-2=2^{11}\left(1+\frac{1}{2}\right)-2$

$=\frac{3}{2}\times 2^{11}-2$

에서 $b=\frac{3}{2}$ 따라서 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\times 2^9=768$

144) **정답** ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이다.

남학생 3명과 여학생 2명을 일렬로 세우는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_5=5!$

(ⅰ) $X=2$일 때, 1번과 2번이 모두 남학생이어야 한다,

1번과 2번에 남학생을 세우는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times 2!$

여학생 2명과 남은 남학생 1명을 3번, 4번, 5번에 세우는 경우의 수는 3!이므로 $\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times 2!\times 3!}{5!}=\frac{3}{10}$

(ⅱ) $X=3$일 때, 3번 남학생 앞에는 2명의 여학생 중 한 명, 3번이 아닌 남학생 중 한 명이 서 있어야 한다.

1번과 2번에 남학생 1명과 여학생 1명을 세우는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 2!$

3번에 남학생을 세우는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1$

4번, 5번에 남은 여학생 1명, 남은 남학생 1명을 세우는 경우의 수는 2!이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times 2!\times{}_2\mathrm{C}_1\times 2!}{5!}=\frac{2}{5}$

(ⅲ) $X=4$일 때, 4번 남학생 앞에는 2명의 여학생과 4번이 아닌 남학생 중 한 명이 서 있어야 한다.

1번, 2번, 3번에 남학생 1명, 여학생 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times 3!$

4번, 5번에 남은 남학생 2명을 세우는 경우의 수는 2!이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times 3!\times 2!}{5!}=\frac{3}{10}$

(ⅰ)~(ⅲ)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}=\frac{30}{10}=3$

따라서 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{6}X+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}\mathrm{E}(X)+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{2}=1$

145) **정답** ④

조건 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로 정규분포를 따르는 확률변수 X의 평균은 2이다.

조건 ㈏에서 $\mathrm{V}(X)=3^2=9$

이때 $g(x)=f(x-4)$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프이다. 따라서 확률변수 Y는 평균이 $2+4=6$이고 표준편차가 3인 정규분포 $\mathrm{N}(6,\ 3^2)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=6+3^2=15$

146) **정답** ⑤

확률분포 X는 이항분포 $\mathrm{B}(48,\ p)$를 따른다.

$\mathrm{V}(-3X+2)=81$에서 $\mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\,\mathrm{V}(x)=81$이므로

$\mathrm{V}(X)=9$, $\mathrm{V}(X)=48\times p(1-p)=9$에서

$p(1-p)=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$, $16p^2-16p+3=0$,

$(4p-1)(4p-3)=0$

$0<p<\frac{1}{2}$이므로 $p=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\frac{1}{4}=12,\ \mathrm{V}(X)=9=3^2$

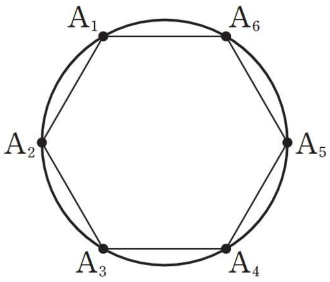
이때 48은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따르고, $Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge 15)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{15-12}{3}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

147) **정답** ④



원에 내접하는 정육각형 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$의 꼭짓점 중에서 서로 다른 세 점을 동시에 택하는 경우의 수는

${}_6C_3 = \dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

삼각형 $A_iA_jA_k$가 직각삼각형이 되는 경우의 수는

(i) 두 점 A_1, A_4를 택한 경우

나머지 한 점을 A_2, A_3, A_5, A_6 중에서 택하면 직각삼각형이 되므로 경우의 수는 4

(ii) 두 점 A_2, A_3를 택한 경우

나머지 한 점을 A_1, A_3, A_4, A_6 중에서 택하면 직각삼각형이 되므로 경우의 수는 4

(iii) 두 점 A_3, A_6을 택한 경우

나머지 한 점을 A_1, A_2, A_4, A_5 중에서 택하면 직각삼각형이 되므로 경우의 수는 4

(i) ~ (iii)에서 삼각형 $A_iA_jA_k$가 직각삼각형이 될 확률은

$\dfrac{4+4+4}{20}=\dfrac{3}{5}$

150회의 시행에서 삼각형 $A_iA_jA_k$가 직각삼각형이 되는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(150,\ \dfrac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=150\times\dfrac{3}{5}=90$, $V(X)=150\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=36=6^2$

이때 150은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 6^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(81\le X\le 99)=P\left(\dfrac{81-90}{6}\le Z\le \dfrac{99-90}{6}\right)$

$=P(-1.5\le Z\le 1.5)=2P(0\le Z\le 1.5)=2\times0.4332$

$=0.8664$

148) **정답** ②

$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$F(t)=P(X\ge m-\sigma t)=P\left(Z\ge \dfrac{m-\sigma t-m}{\sigma}\right)$

$=P(Z\ge -t)$

$Z=\dfrac{Y-2m}{2\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$G(t)=P(Y\le 2m+\sigma t)=P\left(Z\le \dfrac{2m+\sigma t-2m}{2\sigma}\right)$

$=P\left(Z\le \dfrac{t}{2}\right)$

ㄱ. $F(1)=P(Z\ge -1)$, $G(-2)=P(Z\le -1)$이므로

$F(1)+G(-2)=1$ (참)

ㄴ. $2t_1<t_2$이면 $-t_1>-\dfrac{t_2}{2}$에서

$P(Z\ge -t_1)<P\left(Z\ge -\dfrac{t_2}{2}\right)$ ……㉠

$F(t_1)=P(Z\ge -t_1)$, $G(t_2)=P\left(Z\le \dfrac{t_2}{2}\right)=P\left(Z\ge -\dfrac{t_2}{2}\right)$

이므로

㉠에 의해 $F(t_1)<G(t_2)$ (참)

ㄷ. 양수 t에 대하여

$F(t)=P(Z\ge -t)=P(Z\le t)=P(0\le Z\le t)+0.5$

$G(4t)=P(Z\le 2t)=P(0\le Z\le 2t)+0.5$

따라서 $G(4t)+0.5-2F(t)$

$=\{P(0\le Z\le 2t)+0.5\}+0.5-2\{P(0\le Z\le t)+0.5\}$

$=P(0\le Z\le 2t)-2P(0\le Z\le t)$

$=P(0\le Z\le t)+P(t\le Z\le 2t)-2P(0\le Z\le t)$

$=P(t\le Z\le 2t)>P(t\le Z\le 2t)$이므로

$G(4t)+0.5-2F(t)<0$

즉, $G(4t)+0.5<2F(t)$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

149) **정답** ③

정규분포 $N(10,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=10$, $\sigma(\overline{X})=\dfrac{4}{\sqrt{4}}=2$

ㄱ. $E(X)+E(\overline{X})=10+10=20$ (참)

ㄴ. $\sigma(X)+\sigma(\overline{X})=4+2=6$ (거짓)

ㄷ. 확률변수 X는 정규분포 $N(10,\ 4^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-10}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\le 14)=P\left(Z\le \dfrac{14-10}{4}\right)=P(Z\le 1)$

$=0.5+P(0\le Z\le 1)$ ……㉠

또, 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $N(10,\ 2^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{\overline{X}-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\overline{X}\le 8)=P\left(Z\le \dfrac{8-10}{2}\right)=P(Z\le -1)=P(Z\ge 1)$

$=0.5-P(0\le Z\le 1)$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(X \le 14)+\mathrm{P}(\overline{X} \le 8)$
$=\{0.5+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\}+\{0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1\}=1$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

150) **정답** 172
모표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 100인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_1}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

이때 $b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}=3.92$이므로 $\sigma=10$
모표준편차가 $\sigma=10$인 모집단에서 크기가 900인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x_2}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{10}{\sqrt{900}} \le m \le \overline{x_2}+2.58\times\frac{10}{\sqrt{900}}$$

따라서 $d-c=2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{900}}=2\times2.58\times\frac{1}{3}=1.72$ 이므로
$100(d-c)=100\times1.72=172$

151) **정답** ②
임의추출한 1600명 중에서 모바일 쇼핑몰에서 구입한 상품에 대하여 만족하는 이용자의 비율을 확률변수 $\hat{p}$이라 하면

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.8,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.8\times0.2}{1600}=0.01^2$ 이므로

확률변수 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.8,\ 0.01^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.8}{0.01}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. 따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(0.795 \le \hat{p} \le 0.815)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{0.795-0.8}{0.01} \le Z \le \frac{0.815-0.8}{0.01}\right)$
$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 1.5)$
$=\mathrm{P}(-0.5 \le Z \le 0)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$
$=\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=0.1915+0.4332$
$=0.6247$

152) **정답** ④
이 지역의 남자 신생아의 몸무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.36^2)$을 따른다. 남자 신생아 중에서 임의추출한 16명의 몸무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X})=3.4,\ \sigma(\overline{X})=\frac{0.36}{\sqrt{16}}=0.09$ 이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\ 0.09^2)$을 따른다. $Z=\frac{\overline{X}-3.4}{0.09}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$p_1=\mathrm{P}(\overline{X} \ge 3.58)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{3.58-3.4}{0.09}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 2)$
$\cdots\cdots$㉠

또, 이 지역의 여자 신생아의 몸무게를 확률변수 Y라 하면

Y는 정규분포 $\mathrm{N}(3.3,\ 0.32^2)$을 따른다.
여자 신생아 중에서 임의추출한 n명의 몸무게의 표본평균을

$\overline{Y}$라 하면 $\mathrm{E}(\overline{Y})=3.3,\ \sigma(\overline{Y})=\frac{0.32}{\sqrt{n}}$ 이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3.3,\ \left(\frac{0.32}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{Y}-3.3}{\frac{0.32}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$p_2=\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 3.34)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{3.34-3.3}{\frac{0.32}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{8}\right)$
$\cdots\cdots$㉡

이때 $p_1 \le p_2$이므로 ㉠, ㉡에서
$\mathrm{P}(Z \ge 2) \le P\left(Z \ge \frac{\sqrt{n}}{8}\right)$
$\frac{\sqrt{n}}{8} \le 2,\ \sqrt{n} \le 16$
따라서 $n \le 16^2=256$이므로 자연수 n의 최댓값은 256이다.

153) **정답** ③
학생 600명을 조사하여 구한 표본비율의 값을 $\hat{p}$이라 하면
$\hat{p}=\frac{n}{600}$
이 학교의 전체 학생 중 점심 식사 시간이 10분 미만인 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}$ 이므로
$b-a=2\times1.96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=0.0784$,
$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{600}}=\frac{1}{50},\ \hat{p}\hat{q}=\frac{6}{25}$
$\hat{q}=1-\hat{p}$이므로 $\hat{p}(1-\hat{p})=\frac{6}{25}$에서 $25\hat{p}^2-25\hat{p}+6=0$
$(5\hat{p}-3)(5\hat{p}-2)=0$, $\hat{p}=\frac{3}{5}$ 또는 $\hat{p}=\frac{2}{5}$
이때 $n \ge 300$이므로 $\hat{p}=\frac{n}{600} \ge \frac{300}{600}=\frac{1}{2}$에서 $\hat{p}=\frac{3}{5}$이다.
따라서 $\hat{p}=\frac{n}{600}=\frac{3}{5}$이므로 $n=360$이다.

154) **정답** ①

정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}(50,\ 2^2)$을 따른다. 이때 $Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{53-50}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\le 1.5)=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

또, 정규분포 $\mathrm{N}(75,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 25인 표본평균 $\overline{Y}$는

정규분포 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{Y}\le 69)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{69-75}{\frac{\sigma}{5}}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le-\frac{30}{\sigma}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(-\frac{30}{\sigma}\le Z\le 0\right)=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 53)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{30}{\sigma}\right)$

즉, $1.5=\frac{30}{\sigma}$이어야 하므로 $\sigma=20$이다.

따라서

$\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 71)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{71-75}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+0.5$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+0.5=0.3413+0.5=0.8413$

155) ③

[해설]

{출제 의도}

이산확률변수의 확률분포를 나타내는 표에서 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+b=1$

즉, $a+b=\frac{3}{4}$ ……㉠

또 $E(X)=5$이므로

$a1\times a+3\times\frac{1}{4}+7\times b=5$

즉,$a+7b=\frac{17}{4}$ ……㉡

㉡-㉠을 하면 $6b=\frac{7}{2}$

따라서 $b=\frac{7}{12}$

156) ②

[해설]

$P(X\ge x)=k-\log x\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 9)$에서

$P(X\ge 1)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=9)$

$=k-\log 1=1$

이므로 $k=1$

즉, $P(X\ge x)=1-\log x$

$P(2\le X\le 4)=P(X\ge 2)-P(X\ge 5)$

$=(1-\log 2)-(1-\log 5)$

$=\log 5-\log 2$

$=\log\frac{10}{2}-\log 2$

$=1-\log 2-\log 2$

$=1-2\log 2$

따라서

$k+P(2\le X\le 4)=1+(1-2\log 2)=2(1-\log 2)$

$=2\log 5$

157) ③

[해설]

$P(X=1)=p_1$이라 하면 $P(X=2)=p_1+\frac{1}{8}$

$P(X=3)=P(X=2)+\frac{1}{8}$

$=\left(p_1+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}$

$=p_1+\frac{1}{4}$

$P(X=4)=P(X=3)+\frac{1}{8}$

$=\left(p_1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}$

$=p_1+\frac{3}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$p_1+\left(p_1+\frac{1}{8}\right)+\left(p_1+\frac{1}{4}\right)+\left(p_1+\frac{3}{8}\right)=1$

$4p_1+\frac{3}{4}=1$

$p_1=\frac{1}{16}$이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

따라서$E(X)=1\times\frac{1}{16}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{5}{16}+4\times\frac{7}{16}=\frac{25}{8}$

158) ②

[해설]

확률의 총합은 1이므로

$\left(a^2+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{b}{2}\right)+\frac{1}{8}+\left(b^2+\frac{3}{16}\right)=1$

$a^2+\left(b^2-\frac{b}{2}+\frac{1}{16}\right)=0$

즉, $a^2+\left(b-\frac{1}{4}\right)^2=0$이므로 $a=0,\ b=\frac{1}{4}$!:

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}=\frac{11}{8}$

$V(X)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{79}{64}$

159) ⑤

[해설]

{출제 의도}

이산확률변수 X의 평균을 구한 후 확률변수 $aX+b$의 평균을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}
확률의 총합은 1이므로
$\frac{1}{4}+a+2a=1$
$3a=\frac{3}{4}$
즉, $a=\frac{1}{4}$
따라서 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$이므로
$E(4X+10)=4E(X)+10$
$=4\times\frac{5}{4}+10$
$=15$
160) ②
[해설]
$E(3X-1)=3E(X)-1$이므로 $3E(X)-1=2$에서
$E(X)=1$
$V(2X+3)=2^2V(X)=4V(X)$이므로
$4V(X)=1$에서 $V(X)=\frac{1}{4}$
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로
$\frac{1}{4}=E(X^2)-1$
따라서 $E(X^2)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
161) ⑤
[해설]
확률의 총합은 1이므로
$\frac{2}{5}+a+\frac{1}{5}+b=1$
즉, $a+b=\frac{2}{5}$ ……㉠
$E(2X+3)=5$에서
$E(2X+3)=2E(X)+3=5$이므로
$E(X)=1$
이때 $E(X)=0\times\frac{2}{5}+1\times a+2\times\frac{1}{5}+3\times b=1$이므로
$a+3b=\frac{3}{5}$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{10}$
따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$V(X)=0^2\times\frac{2}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{10}-1^2=1$이므로
$V(2X+3)=2^2V(X)$
$=4\times1=4$
162) ⑤
[해설]
확률변수 X가 가지는 값은 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각
$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$
$P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{4}{10}$
$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$
이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

이때
$E(X)=2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{4}{10}+4\times\frac{3}{10}$
$=\frac{30}{10}$
$=3$
따라서 $E(4X+3)=4E(X)+3=4\times3+3=15$
163) 30
[해설]
{출제 의도}
이항분포를 따르는 확률변수 X의 분산을 구한 후 확률변수 $aX+b$의 분산을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다
{풀이}
동전 2개 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는
이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.
따라서 $V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$이므로
$V(4X+1)=16V(X)=16\times\frac{15}{8}=30$
164) ①
[해설]
$X+Y=9$에서 $Y=9-X$이므로
$V(2Y-3)=V(-2X+15)$이다.
이때 확률변수 X는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$E(X)=9\times\frac{1}{3}=3$
$V(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$
따라서
$V(3X+2)-V(2Y-3)=V(3X+2)-V(-2X+15)$
$=9V(X)-4V(X)=5V(X)$
$=5\times2=10$
{다른 풀이}
확률변수 X는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로
$V(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$
$V(Y)=9\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=2$
따라서
$V(3X+2)-V(2Y-3)=9V(X)-4V(Y)$
$=9\times2-4\times2$
$=10$
165) ⑤
[해설]
확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로
$V(X)=np(1-p)=\frac{21}{16}$이고
${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)=21{}_nC_np^n$이다.
즉, $np^{n-1}(1-p)=21p^n$에서 $p>0$이므로 $n(1-p)=21p$
이때 $np(1-p)=\frac{21}{16}$이므로 $21p^2=\frac{21}{16}$
따라서 $p=\frac{1}{4}$, $n=7$
$E(X)=7\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$, $V(X)=\frac{21}{16}$
이때 $E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{21}{16}+\frac{49}{16}=\frac{35}{8}$이므로
$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{21}{16}+\frac{49}{16}=\frac{35}{8}$
166) ③
[해설]
주머니에 들어 있는 공의 개수는
$1+2+3+\cdots+10=\frac{10\times11}{2}=55$

한 번의 시행에서 k 이상인 수가 적힌 공이 나올 확률은

$$\frac{k}{55}+\frac{k+1}{55}+\cdots+\frac{10}{55}=\frac{1}{55}\times\frac{(11-k)(k+10)}{2}$$
$$=\frac{(11-k)(k+10)}{110}$$

확률변수 X가 이항분포 $B\left(110,\ \frac{(11-k)(k+10)}{110}\right)$을 따르므로

$E(X)=(11-k)(k+10)=68$

$-k^2+k+42=0$에서 $k^2-k-42=0$이므로

$(k-7)(k+6)=0$

따라서 $k=-6$또는 $k=7$

$k>0$이므로 $k=7$

167) 10

[해설]

{출제 의도}

연속확률변수 X의 확률밀도함수에서 그래프의 성질을 이해하고 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$P(0\le X\le 3)=1$이어야 하므로

$P(0\le X\le 3)=3a=1$

즉, $a=\frac{1}{3}$

$P(x\le X\le 3)=\frac{1}{3}(3-x)$이므로

$$P(0\le X\le a)=P\left(0\le X\le \frac{1}{3}\right)$$
$$=P(o\le X\le 3)-P\left(\frac{1}{3}\le X\le 3\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}$$
$$=\frac{1}{9}$$

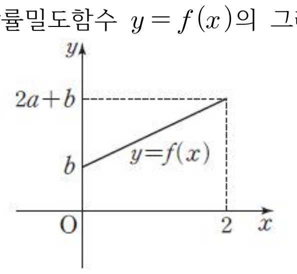
따라서 $p=9$, $q=1$이므로

$p+q=10$

168) ①

[해설]

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\{b+(2a+b)\}\times 2=1$

즉, $a+b=\frac{1}{2}$이고 $a>0$, $b>0$이므로

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$에서 $\frac{1}{4}\ge\sqrt{ab}$

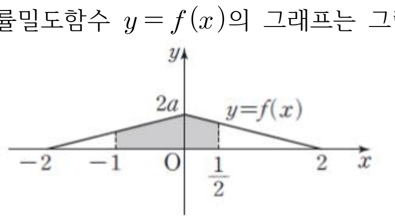
$\left(\text{단, 등호는 } a=b=\frac{1}{4}\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $ab\le\frac{1}{16}$이므로 ab의 최댓값은 $\frac{1}{16}$이다.

169) ②

[해설]

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-2\le x\le 2$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 2a=1$

즉, $a=\frac{1}{4}$

따라서

$$P\left(-1\le X\le\frac{1}{2}\right)=1-P(-2\le X\le -1)-P\left(\frac{1}{2}\le X\le 2\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{8}$$
$$=1-\frac{1}{8}-\frac{9}{32}$$
$$=\frac{19}{32}$$

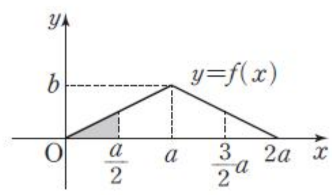
170) ④

[해설]

$f(x)$가 확률밀도함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이다.

즉, $\frac{1}{2}\times 2a\times b=1$에서

$ab=1$ ……㉠



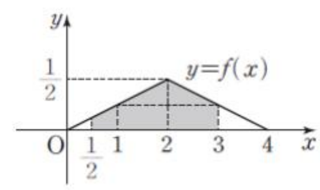
또 $P(0\le X\le a-2b)=\frac{1}{8}$이므로 그림에서 $a-2b=\frac{a}{2}$

즉, $a=4b$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $4b^2=1$이므로 $b=\frac{1}{2}$, $a=2$

따라서

$$P\left(b\le X\le\frac{3}{2}a\right)=P\left(\frac{1}{2}\le X\le 3\right)$$
$$=1-P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)-P(3\le X\le 4)$$
$$=1-P\left(0\le X\le\frac{1}{2}\right)-P(0\le X\le 1)$$
$$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{27}{32}$$



171) ④

[해설]

$-a\le x\le b$에서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times(b+a)\times b=1$

즉, $ab+b^2=2$ ……㉠

$P(a\le X\le b)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{1}{2}\times(b-a)\times b=\frac{1}{4}$

즉, $--ab+b^2=\frac{1}{2}$ ……㉡

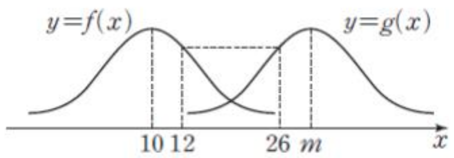
㉠, ㉡에서 $b^2=\frac{5}{4}$이고 $b>0$이므로

$b=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $a=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

따라서 $a+b=\frac{3\sqrt{5}}{10}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

172) ④

[해설]
두 연속확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선$x=0$, $x=1$및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이고 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이다.
$g(x)+kf(x)=5$에서 $y=kf(x)$의 그래프와 두 직선 $x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k이므로
$y=g(x)+kf(x)$의 그래프와 두 직선$x=0$, $x=1$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k+1=5$이다.
따라서 $k=4$
{참고}
$\int_0^1 f(x)dx=1$, $\int_0^1 g(x)dx=1$이므로
$\int_0^1 \{g(x)+kf(x)\}dx=\int_0^1 5dx$
$1+k=5$
따라서 $k=4$
173) ②
[해설]
{출제 의도}
정규분포와 표준정규분포의 성질을 이해하고 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 서로 같으므로 확률밀도함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 평행이동에 의하여 일치할 수 있다.
확률변수 Y가 정규분포 $N(m,\ 4^2)$을 따르고, $P(Y\geq 26)\geq 0.5$이므로 $m\geq 26$이다.



따라서 $m=26+2=28$이므로 확률변수 Y는 정규분포 $N(28,\ 4^2)$을 따른다.
$Z=\dfrac{Y-28}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$P(Y\leq 20)=P\left(Z\leq \dfrac{20-28}{4}\right)=P(Z\leq -2)=P(Z\geq 2)$
$0.5-P(0\leq Z\leq 2)=0.5-0.4772=0.0228$
174) ⑤
[해설]
$Z=\dfrac{X-m}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$$P(X\geq 54)=P\left(Z\geq \dfrac{54-m}{4}\right)$$
$$=0.9332$$
$$=0.5+0.4332$$
$$=0.5+P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=P(Z\geq -1.5)$$
따라서 $\dfrac{54-m}{4}=-1.5$이므로
$m=60$
175) ④
[해설]
$P(X\leq a)+P(X\leq b)=1$이고
$P(X\leq b)+P(X\geq b)=1$이므로
$P(X\leq a)=P(X\geq b)$
따라서 $\dfrac{a+b}{2}=48$이므로
$a+b=96$ ……㉠
$Z=\dfrac{X-48}{6}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$$P(X\leq b-a)=P\left(Z\leq \dfrac{b-a-48}{6}\right)$$
$$=0.1587$$
$$=0.5-0.3413$$
$$=P(Z\leq -1)$$
이므로
$\dfrac{b-a-48}{6}=-1$
즉, $b-a=42$ ……㉡
㉠, ㉡에서 $a=27$, $b=69$
따라서
$$P\left(\dfrac{b}{3}+13\leq X\leq 2a+3\right)=P(36\leq X\leq 57)$$
$$=P\left(\dfrac{36-48}{6}\leq Z\leq \dfrac{57-48}{6}\right)$$
$$=P(-2\leq Z\leq 1.5)$$
$$=P(0\leq Z\leq 2)+P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.4772+0.4332$$
$$=0.9104$$
176) 95
[해설]
$Z=\dfrac{X-100}{2}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(3n+c)$$
$$=f(3+c)+f(6+c)+f(9+c)+\cdots$$
$$=P(3+c\leq X\leq +6+c)+P(6+c\leq X\leq 9+c)+P(9+c\leq X\leq 12+c)+\cdots$$
$$=P(X\geq 3+c)$$
$$=P\left(Z\geq \dfrac{c-97}{2}\right)$$
이 때
$0.8413=0.5+0.3413=0.5+P(0\leq Z\leq 1)=P(Z\geq -1)$ 이므로
$\dfrac{c-97}{2}=-1$
따라서 $c=95$
177) ④
[해설]
확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(50)$이 만나는 점의 개수가 1이므로 X의 평균은 $m=50$이다.
따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(50,\ \sigma^2)$을 따른다.
$Z=\dfrac{X-50}{\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$P(X\geq 51)=P\left(Z\geq \dfrac{1}{\sigma}\right)=0.5-P\left(0\leq Z\leq \dfrac{1}{\sigma}\right)=0.3085$
$P\left(0\leq Z\leq \dfrac{1}{\sigma}\right)=0.5-0.3085=0.1915$
따라서
$$P(49\leq X\leq 51)=P\left(-\dfrac{1}{\sigma}\leq Z\leq \dfrac{1}{\sigma}\right)$$
$$=2P\left(0\leq Z\leq \dfrac{1}{\sigma}\right)$$
$$=2\times 0.1915$$
$$=0.3830$$
178) ④
[해설]
확률변수 X는 정규분포$N(m,\ \sigma^2)$을 따르므로$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ 이라 하면
확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
확률변수 Y는 정규분포 $N(240-k,\ 4\sigma^2)$을 따르므로
$Z=\dfrac{Y+k-240}{2\sigma}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X \le 121) = P\left(Z \le \frac{121-M}{\sigma}\right)$, $P(Y \ge 230) = P\left(Z \ge \frac{k-10}{2\sigma}\right)$이고

$0.6915 = 0.5 + 0.1915 = 0.5 + P(0 \le Z \le 0.5) = P(Z \le 0.5)$
$= P(Z \ge -0.5)$

이므로

$\frac{121-m}{\sigma} = 0.5$, $\frac{k-10}{2\sigma} = -0.5$

따라서 $2m + \sigma = 242$, $\sigma + k = 10$이므로

$2m + 2\sigma + k = 242 + 10 = 252$

179) ③

[해설]

{출제 의도}

학생이 기부한 쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 X가 정규분포를 따를 때, 정규분포와 표준정규분포 사이의 관계를 이용하여 X에 대한 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다

{풀이}

쌀 모으기 행사에 참여한 각 학생이 기부한 쌀의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(1.5,\ 0.2^2)$을 따른다.

$Z = \frac{X-1.5}{0.2}$ 라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(1.3 \le X \le 1.8) = P\left(\frac{1.3-1.5}{0.2} \le Z \le \frac{1.8-1.5}{0.2}\right)$
$= P(-1 \le Z \le 1.5)$
$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 1.5)$
$= 0.3413 + 0.4332$
$= 0.7745$

180) ①

[해설]

이 고등학교 각 학생의 일주일 동안 자기 주도적 학습 시간을 확률변수

X라 하면 X는 정규분포 $N(32,\ 5^2)$을 따르고$Z = \frac{X-32}{5}$ 라 하면

확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P(26 \le X \le 40) = P(-1.2 \le Z \le 1.6)$
$= P(0 \le Z \le 1.2) + P(0 \le Z \le 1.6)$
$= 0.3849 + 0.4452$
$= 0.8301$

181) ②

[해설]

이 공장에서 생산되는 축구공 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는

정규분포 $N(430,\ 3^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-430}{3}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P(427 \le X \le 436) = P(-1 \le Z \le 2)$
$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 2)$
$= 0.3413 + 0.4772$
$= 0.8185$

182) ④

[해설]

이 지역에 유통되는 용량이 500 mL인 에너지 음료 1개에 포함된 카페인 함량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(157,\ 10^2)$을 따르므로

확률변수$Z = \frac{X-157}{10}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 청소년의 하루 권장 카페인 섭취량은 몸무게 1 kg당 2.5 mg 이하이므로 몸무게가 50 kg인 청소년의 하루 권장 카페인 섭취량은 $2.5 \times 50 = 125(mg)$이하이다.

따라서 구하는 확률은

$P(X \le 125) = P(Z \le -3.2)$
$= 0.5 - P(0 \le Z \le 3.2)$
$= 0.5 - 0.4993$
$= 0.0007$

183) ②

[해설]

이 지역 각 스마트폰 가입자가 한 달 동안 사용한 음성통화량과 데이터 사용량을 각각 확률변수 X, Y라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(150,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-150}{5}$은 표준정규분포

$N(0,\ 1)$을 따른다. 확률변수 Y는 정규분포 $N(300,\ 20^2)$을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{Y-300}{20}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(X \ge K) = P(Y \le 5k)$이므로

$P\left(Z \ge \frac{k-150}{5}\right) = P\left(Z \le \frac{5k-300}{20}\right)$

따라서 $\frac{k-150}{5} + \frac{5k-300}{20} = 0$이므로

$k = 100$

184) ⑤

[해설]

{출제 의도}

확률변수 X가 이항분포를 따를 때, 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 이용하여 X에 대한 확률을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

C 회사 제품을 선택한 고객의 수를 확률변수 X라 하면 한 고객이

C 회사 제품을 선택할 확률은 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$이다.

확률변수 X는 이항분포 $B\left(192,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X) = 192 \times \frac{1}{4} = 48$, $\sigma(X) = \sqrt{192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = 6$

이때 $n = 192$는 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규

분포 $N(48,\ 6^2)$을 따르고 확률변수 $Z = \frac{X-48}{6}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 C 회사 제품을 선택할 고객이 42명 이상일 확률은

$P(X \ge 42) = P\left(Z \ge \frac{42-48}{6}\right) = P(Z \ge -1) = P(Z \le 1)$
$= P(Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$
$= 0.5 + 0.3413$
$= 0.8413$

185) ④

[해설]

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$E(X) = n \times \frac{4}{5} = \frac{144}{5}$에서$n = 36$

따라서$\sigma(X) = \sqrt{36 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{12}{5}$

이때 $n = 36$이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포

$N\left(\frac{144}{5},\ \left(\frac{12}{5}\right)^2\right)$ 을 따르고, 확률변수 $Z = \frac{X - \frac{144}{5}}{\frac{12}{5}}$ 는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서

$P\left(X \le \frac{2}{3}n\right) = P(X \le 24)$
$= P(Z \le -2)$
$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2)$
$= 0.5 - 0.4772$
$= 0.0228$

186) ①

[해설]

주사위 1개와 동전 1개를 동시에 던지는 시행을 1번 했을 때 주사위는 3의 배수의 눈이 나오고 동전은 앞면이 나오는 사건을 A라 하면

$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

따라서 이 게임을 180회 반복하였을 때 사건 A가 나타나는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$을 따른다.

이때 180이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따르며, 확률변수

$Z=\frac{X-30}{5}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 얻은 점수는 $50X-10(180-X)=60X-1800$이고 720점 이상의 점수를 얻으려면 $60X-1800\geq 720$에서 $X\geq 42$이어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 42)&=P(Z\geq 2.4)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 2.4)\\&=0.5-0.4918\\&=0.0082\end{aligned}$$

187) ①

[해설]

{출제 의도}

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분포가 정규분포 $N\left(m,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다는 것을 이해할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

정규분포 $N(50,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(50,\ \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$, 즉 $N(50,\ 2^2)$을 따른다.

정규분포 $N(75,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 25인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{Y}$이므로 확률변수 $\overline{Y}$는

정규분포 $N\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉 $N\left(75,\ \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{2}$ 이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\leq 53)=P(Z\leq 1.5)=0.5+P(0\leq Z\leq 1.5)$

또한 $Z=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{\sigma}{5}}$라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$P(\overline{Y}\leq 69)=P\left(Z\leq -\frac{30}{\sigma}\right)=0.5-P\left(0\leq Z\leq \frac{30}{\sigma}\right)$

이때 $P(\overline{X}\leq 53)+P(\overline{Y}\leq 69)=1$이므로

$P(0\leq Z\leq 1.5)=P\left(0\leq Z\leq \frac{30}{\sigma}\right)$

따라서 $\frac{30}{\sigma}=1.5,\ \sigma=20$이므로

$$\begin{aligned}P(\overline{Y}\geq 71)&=P\left(\frac{\overline{Y}-75}{4}\geq\frac{71-75}{4}\right)=P(Z\geq -1)\\&=0.5+P(0\leq Z\leq 1)=0.5+0.3413\\&=0.8413\end{aligned}$$

188) 105

[해설]

평균이 25이고 표준편차가 σ인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$E(\overline{X})=25=\frac{n}{4},\ \ V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{1}{20}$이므로 $n=100,\ \sigma^2=5$

따라서 $n+\sigma^2=100+5=105$

189) ④

[해설]

정규분포 $N(m,\ 20^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(m,\ \left(\frac{20}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$, 즉 $N(m,\ 5^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-m}{5}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-m+1|\leq 8)&=P(-8\leq\overline{X}-m+1\leq 8)\\&=P(m-9\leq\overline{X}\leq m+7)\\&=P\left(-\frac{9}{5}\leq Z\leq\frac{7}{5}\right)\\&=P(-1.8\leq Z\leq 1.4)\\&=P(0\leq Z\leq 1.8)+P(0\leq Z\leq 1.4)\\&=0.4641+0.4192\\&=0.8833\end{aligned}$$

190) 16

[해설]

{출제 의도}

표본평균의 분포가 정규분포를 따르는 경우 실생활에 관련하여 모표준편차를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

모집단이 정규분포를 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포

$N\left(50,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{\frac{\sigma}{4}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(50\leq\overline{X}\leq 56)&=P\left(50-\frac{50}{\frac{\sigma}{4}}\leq Z\leq\frac{56-50}{\frac{\sigma}{4}}\right)\\&=P\left(0\leq Z\leq\frac{24}{\sigma}\right)\\&=0.4332\end{aligned}$$

에서

$\frac{24}{\sigma}=1.5$이므로

$\sigma=16$

191) ①

[해설]

이 농장의 7년생 블루베리 나무에서 수확되는 블루베리 열매 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(2.5,\ 0.2^2)$을 따르므로 이 농장에서 임의추출한 블루베리 열매 100개의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(2.5,\ 0.02^2)$을 따른다.

이때 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-2.5}{0.02}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\leq 2.46)&=P(Z\leq -2)\\&=0.5-P(0\leq Z\leq 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

192) ④

[해설]

확률변수 X는 정규분포 $N(100,\ 5^2)$을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{X-100}{5}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

모집단에서 임의추출한 크기가 4인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100,\ \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로 확률변수 $Z=\frac{\overline{X}-100}{\frac{5}{2}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

이때 $P(X\leq 106)>P(\overline{X}\geq 106)+\frac{k}{100}$에서

$P(Z\leq 2.4)>P(Z\leq 1.2)+\frac{k}{100}$

$0.5+P(0\leq Z\leq 2.4)>0.5+P(0\leq Z\leq 1.2)+\frac{k}{100}$

$0.4918>0.3849+\frac{k}{100}$

$0.1069 > \frac{k}{100}$
$k < 10.69$
따라서 자연수 k의 개수는 10이다
193) ③
[해설]
이 공장에서 생산되는 건전지의 전압을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(1.5,\ 0.2^2)$을 따른다.
임의추출한 건전지 4개의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(1.5,\ 0.1^2)$을 따르므로 확률변수
$Z = \frac{\overline{X}-1.5}{0.1}$ 는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다. $4\overline{X} \geq 5.36$, 즉 $\overline{X} \geq 1.34$이므로
A 전자기기가 정상 작동되어질 확률은
$p_1 = P(\overline{X} \geq 1.34)$
$= P(Z \geq -1.6)$
$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.6)$
$= 0.9452$
$4\overline{X} \geq 5.52$ 즉 $\overline{X} \geq 1.38$이므로 B 전자기기가 정상 작동되어질 확률은
$p_2 = P(\overline{X} \geq 1.38)$
$= P(Z \geq -1.2)$
$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.2)$
$= 0.8849$
따라서 $p_1 - p_2 = 0.9452 - 0.8849 = 0.0603$
194) ③
[해설]
이 고등학교의 한 학생 당 상담 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(24,\ 6^2)$을 따르므로 임의추출한 4명의 상담 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N(24,\ 3^2)$을 따르며, 확률변수
$Z = \frac{\overline{X}-24}{3}$ 는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다. 오후 5시부터 오후 6시 39분 이내까지 상담하는 경우 5분씩 3번의 쉬는 시간을 포함한 소요 시간은 99분 이하이므로 4명의 상담 시간은 84분 이하이다.
$4\overline{X} \leq 84$이므로 $\overline{X} \leq 21$
따라서 구하는 확률은
$P(X \leq 21) = P(Z \leq -1)$
$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$
$= 0.5 - 0.3413$
$= 0.1587$
195) ①
[해설]
{출제 의도}
정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
이 회사 직원 중 n명을 임의추출하여 구한 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은
$\overline{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$
따라서
$\overline{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 38.08$ ……㉠
$\overline{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 45.92$ ……㉡
㉡-㉠을 하면
$2 \times 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 7.84$
$\frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{7.84}{3.92} = 2$
따라서 $n = 25$
196) ③
[해설]
모평균이 m, 모표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 신뢰도 99 %로 추정한 모평균m에 대한 신뢰구간은
$\overline{x} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로
$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}}$
따라서 $\frac{5.16\sigma}{\sqrt{n}} = 0.86\sigma$, $\sqrt{n} = \frac{5.16}{0.86} = 6$이므로 $n = 36$
197) ④
[해설]
이 무역회사 직원들의 일주일 동안 국제 통화시간의 모평균이 m이므로 모집단이 정규분포$N(m,\ 2^2)$을 따른다. 이 회사의 직원 중 n명을 임의추출하여 일주일 동안 국제 통화시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x}$이므로
신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간은
$\overline{x} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}$
이때 $\left(\overline{x} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) + \left(\overline{x} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 11.02 + 12.98$
에서 $2\overline{x} = 24$이므로 $\overline{x} = 12$
$\left(\overline{x} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 12.98 - 11.02$에서
$2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 1.96$이므로 $\sqrt{n} = 4$
즉, $n = 16$
따라서 $n + \overline{x} = 16 + 12 = 28$
198) 157
[해설]
{출제 의도}
모집단에서 모비율 p의 확률분포를 이해하고, 표본비율 $\hat{p}$의 확률분포와의 관계를 이용하여 표본의 크기 n의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포
$N\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따르고$Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$는 근사적으로 표준 정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
이때 $Z = \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$도 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로
$P\left(|\hat{p}-p| \leq 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = 0.9544$
$P(\hat{p}-p| \leq 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\,) \geq 0.9544$에서
$2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$
$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.16$, $\sqrt{n} \geq \frac{25}{2}$
$n \geq \frac{625}{4} = 156.25$
따라서 n의 최솟값은 157이다.
199) ③
[해설]
표본비율 $\hat{p}$ 은 표본의 크기 400이 충분히 크므로 근사적으로 정규분포
$N(0.2,\ 0.02^2)$을 따르고 확률변수 $Z = \frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$ 는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.
$P(\hat{p} \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-0.2}{0.02}\right) = 0.0139$에서
$P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-0.2}{0.02}\right) = 0.5 - 0.0139 = 0.4861$
즉, $P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-01.}{0.02}\right) = P(0 \leq Z \leq 2.2)$이므로

$\dfrac{k-0.2}{0.02}=2.2$

따라서 $k=0.244$

200) ④

[해설]

작년 졸업생 중에서 임의추출한 100명의 학생 중 취업한 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 $p=0.9$이고 표본의 크기 $n=100$은 충분히 크므로 확률변수 $Z=\dfrac{\hat{p}-0.9}{\sqrt{\dfrac{0.9\times 0.1}{100}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(0.87\le \hat{p}\le 0.96)&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le 9Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

{다른 풀이}

작년 졸업생 중에서 임의추출한 100명의 학생 중 취업한 학생 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(100,\ 0.9)$를 따른다.

이때 $n=100$이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $N(90,\ 3^2)$을 따르고 확률변수 $Z=\dfrac{X-90}{3}$ 은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(87\le X\le 796)&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

201) ②

[해설]

{출제 의도}

모집단에서 표본비율이 주어질 때, 신뢰도에 따른 모비율의 신뢰구간을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

모비율 p에 대하여 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이때 $n=100,\ \hat{p}=\dfrac{90}{100}=0.9$이므로

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{100}}\le p\le \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{0.9\times 0.1}{100}}$$

따라서 $c=1.96\times\sqrt{\dfrac{0.9\times 0.1}{100}}=1.96\times 0.03=0.0588$

202) ②

[해설]

이 수목원의 전체 사전 예약자 중 2500명을 임의추출하여 조사한 결과 2000명이 수목원에 입장하였으므로 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$\hat{p}=\dfrac{2000}{2500}=\dfrac{4}{5}$

이때 $n=2500$이 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\frac{4}{5}-2.58\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{2500}}\le p\le \frac{4}{5}+2.58\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{2500}}$$

따라서

$$\begin{aligned}250(b-a)&=250\times\left(2\times 2.58\times\sqrt{\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{2500}}\right)\\&=250\times\left(2\times 2.58\times\frac{2}{150}\right)=10.32\end{aligned}$$

203) ④

[해설]

모비율 p인 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le \hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\begin{aligned}b-a&=2\times 1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\\&=3.92\times\sqrt{\frac{-\left(\hat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}{n}}\end{aligned}$$

따라서 $b-a$의 최댓값은 $\hat{p}=\dfrac{1}{2}$일 때 $3.92\times\sqrt{\dfrac{1}{4n}}$ 이므로

$3.92\times\sqrt{\dfrac{1}{4n}}=0.098$에서

즉, $4n=1600$이므로 $n=400$

{다른 풀이}

$\hat{q}=1-\hat{p}$이라 하면 $\hat{p}>0,\ \hat{q}>0$이므로

$$\hat{p}(1-\hat{p})=\hat{p}\hat{q}\le\left(\frac{\hat{p}+\hat{q}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

즉, $\hat{p}(1-\hat{p})$은 $\hat{p}=\dfrac{1}{2}$일 때 최댓값이 $\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $3.92\times\sqrt{\dfrac{1}{4n}}=0.098$에서

$\sqrt{4n}=40$

즉, $4n=1600$이므로 $n=400$

204) 576

[해설]

모집단에서 크기가 300인 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율이 $\widehat{p_1}$일 때 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\widehat{p_1}-1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{300}}\le p\le \widehat{p_1}+1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{300}}$$ 이므로

$\widehat{p_1}=\dfrac{1}{4}$

$$c=1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{300}}=1.96\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}$$

모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 표본비율이 $\widehat{p_2}$일 때 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\widehat{p_2}-1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n}}\le p\le \widehat{p_2}+1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n}}$$ 이므로

$\widehat{p_2}=\dfrac{4}{5}\widehat{p_1}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$

$$d=1.96\times\sqrt{\frac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n}}=1.96\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{sqr수}$$

이때 $2c=3d$에서

$2\times 1.96\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{10}=3\times 1.96\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{\sqrt{n}}$이므로

$\sqrt{n}=24$

따라서 $n=576$