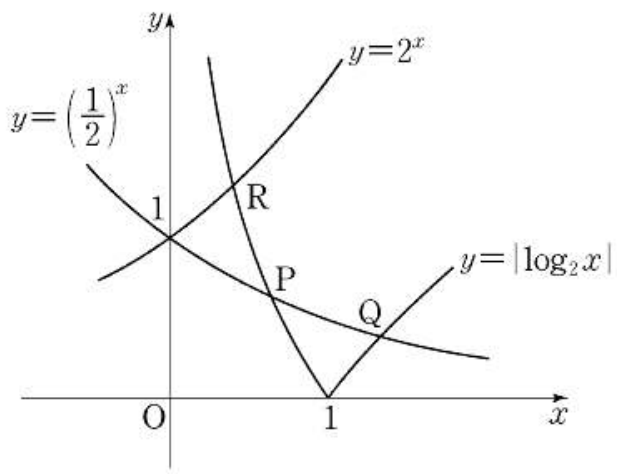
고지우의 난문현답

제 2 회

1. 2011년 수능
2. 2010년 4월 교육청
3. 2015년 4월 교육청
4. 2015년 사관학교
5. 2013년 수능
6. 2015년 사관학교
7. 2014년 수능
8. 2010년 경찰대
9. 2006년 10월 교육청
10. 2011년 9월 평가원

1. 좌표평면에서 곡선 $y=\left|\log_2 x\right|$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$이 만나는 두 점을 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)(x_1 < x_2)$라 하고, 두 곡선 $y=\left|\log_2 x\right|$와 $y=2^x$이 만나는 점을 $\mathrm{R}(x_3, y_3)$이라 하자.
옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < 1$
ㄴ. $x_2 y_2 - x_3 y_3 = 0$
ㄷ. $x_2(x_1 - 1) > y_1(y_2 - 1)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 부등식 $\sin(x+y) \geq \cos(x-y)$를 만족하는 x, y에 대하여 $x+2y$의 최댓값은? (단, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π
④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

3. 함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\dfrac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)=-xe^{2-x}$가 상수 a가 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, $x<a$이면 $f(x)>g(x)$이고, $x>a$이면 $f(x)<g(x)$이다.

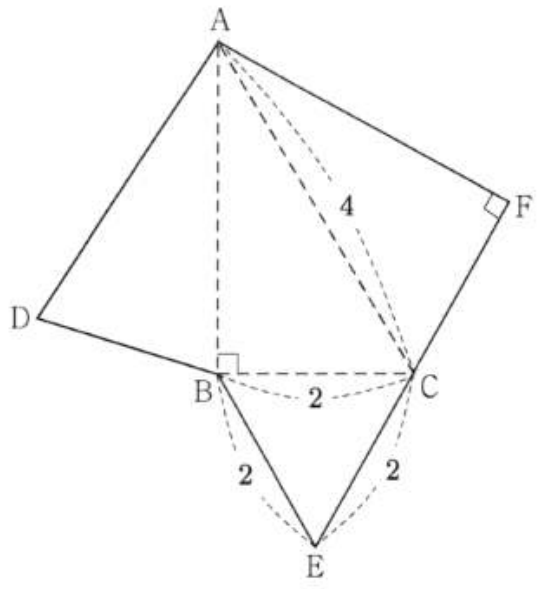
곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $k-e^2$이다. k의 값을 구하시오.

5. 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

$\overline{PF}=1$이고 $\overline{FQ}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?

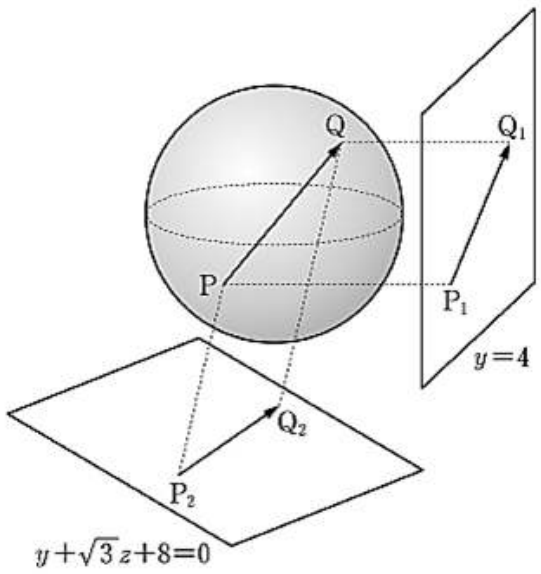
① 210 ② 205 ③ 200
④ 195 ⑤ 190

6. 그림은 어떤 사면체의 전개도이다. 삼각형 BEC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이고 $\angle ABC=\angle CFA=90^\circ$, $\overline{AC}=4$이다. 이 전개도로 사면체를 만들 때, 두 평면 ACF, ABC가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하자. $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

7. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자. $2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2$의 최댓값을 구하시오.



8. 어느 경찰관이 8월에 관할구역을 이틀 연이어 순찰하지 않으면서 5일 순찰하는 방법의 수는?

① ${}_{25}C_5$ ② ${}_{27}C_5$ ③ ${}_{28}C_5$
④ ${}_{29}C_5$ ⑤ ${}_{30}C_5$

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$을 전개하는 식에서 x^2항의 계수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

10. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번을 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

추가 과제

1. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $f(2x)g(2x)=\{f(x)g(x)\}^2$

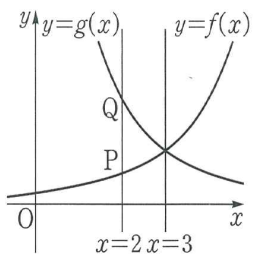
ㄴ. $a<b$ 이면 $f(-3a)g(2a)<f(-3b)g(2b)$

ㄷ. $a<b$ 이면 $f(4a)g(-3a)>f(4b)g(-3b)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 오른쪽 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^{x-m}$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}$ 의 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $x=2$ 와 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점을 각각 P, Q 라 할 때, $\overline{PQ}=\frac{3}{2}$ 이다. 이때 상수 a, m 에 대하여 am 의 값을 구하여라.(단, $a>1$)



3. 1이 아닌 양수 a, b 에 대하여

$$\lim_{x\to 0+}\frac{a^x+\log_b x}{b^x+\log_a x}=\frac{1}{4}$$

일 때, $\log_a b$ 의 값을 구하여라.

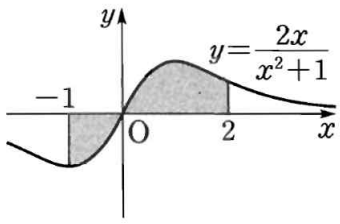
4. 함수 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$ 의 역함수를 $y=\sin^{-1}x$ 라 할 때, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}\frac{x}{2}}{x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1

④ 2 ⑤ 4

추가 과제

5. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



6. 곡선 $y=\sin 2x$와 이 곡선 위의 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $-\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi-\dfrac{1}{4}$

② $-\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi-\dfrac{1}{2}$

③ $-\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

④ $-\dfrac{\pi^2}{36}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

⑤ $-\dfrac{\pi^2}{72}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi$

7. 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{-b}^{-a} f(x)dx+\int_{a}^{b} f(x)dx=0$$

이 성립하는 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x^6-1$

ㄴ. $f(x)=x^{2017}+x^{2015}$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

8. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)+f(-x)=x^2\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)$이 성립할 때, 정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$의 값은?

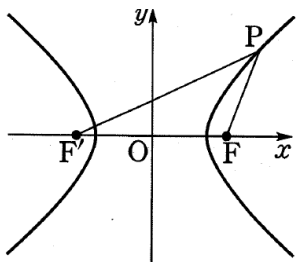
① $\dfrac{2}{e}$ ② $\dfrac{5}{e}$ ③ $e-1$

④ $e-\dfrac{5}{e}$ ⑤ $3e-\dfrac{5}{e}$

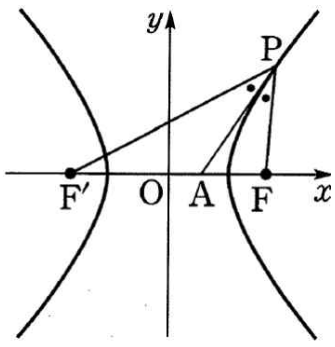
Orbi.kr

추가 과제

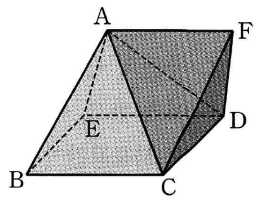
9. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$위의 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 세 선분 PF, FF′, PF′의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때 $\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF}'}^2$의 값은 (단, $\overline{\mathrm{PF}'}>\overline{\mathrm{PF}}$)



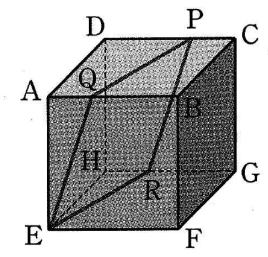
10. 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 ∠F′PF의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라 하면 $\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{FA}}=5:3$이다. 이때 삼각형 PFF′의 둘레의 길이를 구하여라.



11. 오른쪽 그림은 모든 모서리의 길이가 같은 사각뿔 $ABCDE$와 정사면체 $ACDF$가 면 ACD를 공유하도록 붙여 놓은 것이다. 두 면 $BCDE$와 CDF가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 $\overline{AQ}=\overline{CP}=\overline{HR}=1$이다. 평면 $PQER$와 평면 $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.



추가 과제

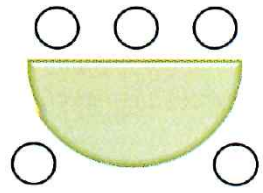
13. 두 구 $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2+z^2-4x+6y-12z+33=0$이 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 서로 접할 때, $a+b-c$의 값은?

① $-\dfrac{33}{7}$ ② -3 ③ $-\dfrac{3}{7}$

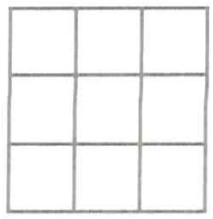
④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ 2

14. 구 $(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=6$에 접하고 직선 $x-1=y=\dfrac{z+1}{2}$에 수직인 평면의 방정식을 모두 구하여라.

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k\times7!$이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.



Orbi.kr

추가 과제

17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10병중에서 1병의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률이 $\frac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80 %라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21}=0.009$, $0.8^{22}=0.007$로 계산한다.)

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{45}\mathrm{C}_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}} \ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

일 때, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$는?

① $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=1$
② $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=5$
③ $\mathrm{E}(X)=15,\ \mathrm{V}(X)=10$
④ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=5$
⑤ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=10$

20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X\le 9)$는?

① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$ ③ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{9}$
④ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

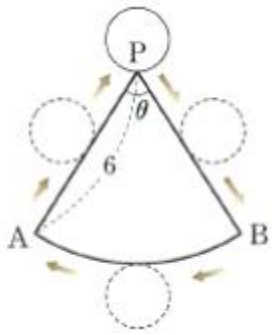
추가 과제

21. $0<a<1$일 때, 함수 $y=a^{-x^2+4x-2}$의 최솟값이 $\frac{1}{4}$이다. 이때 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

22. 방정식 $(x-2)^{x-5}=6^{x-5}$의 모든 근의 곱을 구하여라. (단, $x>2$)

23. 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴 PAB 위의 점 P에서 반지름의 길이가 1인 원이 부채꼴과 접하고 있다. 원이 점 P를 출발하여 부채꼴과 접하면서 세 바퀴를 굴렀더니 점 P로 되돌아왔다. 이때 θ의 값은?



① $\pi-\frac{5}{2}$ ② $\pi-2$ ③ $\pi-\frac{3}{2}$
④ $\frac{\pi}{2}-1$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

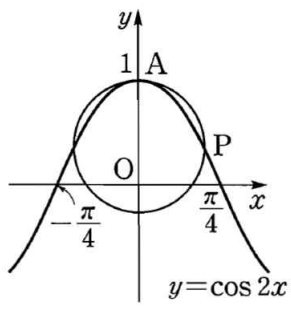
24. $\cos 2x=\frac{1}{3}$일 때, 등비급수

$$1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots$$

의 합을 구하여라.

추가 과제

25. 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 두 점 A, P를 지나고 중심이 y축 위에 있는 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, r의 극한값을 구하여라.
(단, P는 제1사분면 위의 점이다.)



26. 함수 $f(x)=x^3+2x-2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)g(x)-1}{x-1}$의 값은?

① $\frac{11}{5}$ ② $\frac{16}{5}$ ③ $\frac{21}{5}$
④ $\frac{26}{5}$ ⑤ $\frac{31}{5}$

27. 함수 $f(x)=\dfrac{e^{ax}}{x+1}$이 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 a의 최솟값을 구하여라.

28. 함수 $f(x)=\dfrac{a}{x}+\ln x^3-x$가 극댓값과 극솟값을 모두 가질 때, 모든 정수 a의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

추가 과제

29. 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$의 두 점근선이 이루는 둔각의 크기를 구하여라.

30. 기울기가 -1이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$에 접하는 두 직선 사이의 거리는?

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{6}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

31. 매개변수 t로 나타낸 함수

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$

에 대하여 $\frac{dy}{dx}$를 t에 대한 함수로 나타내면? (단, $a>0$)

① $\cos\frac{t}{2}$ ② $\tan\frac{t}{2}$ ③ $\sec\frac{t}{2}$

④ $\csc\frac{t}{2}$ ⑤ $\cot\frac{t}{2}$

32. 곡선 $x=\theta+\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{2}$에 대응하는 점에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

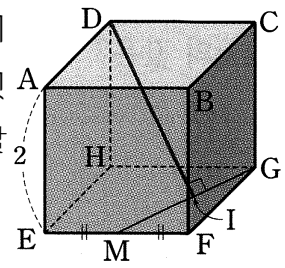
① $\frac{\pi^2}{8}$ ② $\frac{\pi^2}{4}$ ③ $\frac{\pi^2}{2}$

④ 1 ⑤ π

Orbi.kr

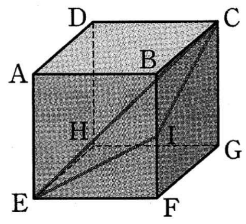
추가 과제

33. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overline{EF}$의 중점을 M, 꼭짓점 D에서 $\overline{GM}$에 내린 수선의 발을 I라 할 때, $\overline{HI}$의 길이는?



① $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

34. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 모서리 BF의 중점을 I라 하고, 두 평면 CEI, $EFGH$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

35. 한 평면 위에 있는 6개의 직선 중에서 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 6개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

36. 지우와 혜리가 각각 오후 2시부터 오후 2시 30분 사이의 임의의 시간에 A지점에 가서 10분 동안 기다리기로 하였다. 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

추가 과제

37. 두 사건 A, B에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 독립이다.
ㄴ. A, B가 서로 독립이면 A, B^c도 서로 독립이다.
ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 A, B도 서로 독립이다.

38. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 임의로 한 개의 문자를 뽑을 때, b를 뽑는 사건을 $[b]$, b 또는 c를 뽑는 사건을 $[b, c]$라 하자. 사건 $[a, b, c, d]$와 서로 독립인 사건인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. $[d, f]$　　ㄴ. $[c, d, e]$　　ㄷ. $[c, d, e, f]$

39. 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 신뢰도 99 %로 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 표본을 조사해야 하는가? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 3) = 0.99$)

① 100개　② 225개　③ 400개
④ 625개　⑤ 900개

40. 어느 도시의 주민 525명을 임의추출하여 자전거 사용률을 조사했더니 16 %이었다. 이 도시 주민의 자전거 사용률 p의 신뢰도 95 %의 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$)

① $0.128 \le p \le 0.192$　② $0.132 \le p \le 0.188$
③ $0.136 \le p \le 0.184$　④ $0.140 \le p \le 0.180$
⑤ $0.144 \le p \le 0.176$