Part 0 : 6월 해설 및 분석

[Prologue]
오랜만에 쓰는 칼럼입니다.
이 칼럼은 단순해설이 아닌 도입부의 사고과정부터 시작하는 해설, 그리고 중간중간 조심했어야할 포인트 등 더 자세히 쓴 해설이고 또한 낯선 문항의 같은 경우 자작문제를 추가하여 조금 더 연습할 수 있게하거나 혹은 낯설이유가 없는 문항이었으면 과거기출을 들고와서 재학습을 시키는 칼럼입니다.
4점문항 위주로만 썼고 3점짜리 같은 경우 본인이 틀렸다면 실수제외 다시 기출학습을 할 것을 권장합니다.

[총평]
1. 공통
다른 선택파트보다 난이도가 더 어렵게 나왔습니다. 하지만 14번과 22번을 제외하곤 객관적으로 어렵다고 보기 힘들며 어렵다고 보기 힘들다는 근거는

1) 과거기출에서 많이 출제되었고
2) "직접적으로" 출제되었지 않더라도 각 요소들은 출제되었었고 사고과정 또한 교과개념에 매우 충실하고 단순함

입니다.

작년 나형시험을 치른 친구들은 특히 체감난이도가 높을 수 있는데 나형과는 다른 시험지라고 생각하셔야하고 예년처럼 아름답고 깔끔한 겉모양은 잊으시면 됩니다. 기출학습위주의 공부를 했으면 2-3회독이후엔 슬슬 n제로 가셔야하고 (작년가형도 당연) 여기서 말하는 n제는 꼭 고난도 뿐만 아녀도 기출 외 낯선문항 전부를 지칭합니다. ebs도 모두 포함입니다. 많은 문제를 풀면서 낯선 겉모양의 문항들도 기출풀 듯이 당연한 사고과정으로 푸는 학습을 하셔야 현장에서도 당황하지 않고 일관되게 풉니다. 30문제에서 엇?하고 고민할 건 1문제 많아야 2문제라고 봅니다. 본인이 반 이상의 문제를 덜컹거렸다? 경험 더 쌓으셔야 합니다.

만약 본인이 이 시기까지 충분히 기출학습을 했는데도 문제를 보면서 기출문제와의 공통점을 충분히 느끼지 못했으면, 기출로 돌아가야 할 것 같지만 꼭 그렇지 않습니다.
공부비중의 절반을 그간 해둔 기출학습의 "복습"으로 두시고 나머지 절반은 낯선문제 푸셔야 합니다.
기출 계속 본다고 낯설게 등장한 문제에서 "어 이거 몇학년도 몇 번이네?" 하고 다 매칭시킬 수 있을까요? 극소수라고 봅니다. 낯선문제풀면서 더 연습합니다.

+ 14번은 아예 낯선문제인가요?
아니요.
++ 14번에서 절댓값 쪼갤 생각 어떻게 할 수 있나요
절댓값쪼개기를 몰랐으면 최소한 절댓값 속 함수 $x\{f(x-p)+q\}$를 사차함수로 두고 생각했으면 답 낼 수 있었으며 경험 더 쌓으라 한 이유가 문제풀다보면 만나는 소재입니다. 물론. n제를 풀라는 것은 처음봤어도 풀어낼 능력치 기르기 위함도 있습니다.

2. 미적
그간의 미적기출과 비교하면 "평이하다" 혹은 "쉽다"라고 봅니다만 선택과목임을 고려하고 고3의 진도를 고려했을 때 알맞게 나왔다고 봅니다.

28번의 경우 각의이등분선 정리를 고려하는 경우가 많은데 글쎄 각의이등분선정리는 고려할 수 있는 2차 수단이지 원의필수성질마냥 보자마자 해야할 1차수단이라고 보진 않습니다. 만약 이등분선정리&근사 로 답 냈으면 다행이고 그냥 순수 이등분선정리로 식이 복잡해지면 거기서는 사인-코사인법착으로 방향을 바꿨어야하는게 맞다고 봅니다.
기본적인 삼각형을 관찰해서 직각삼각형으로 뺄지 사인코사인법칙으로 뺄지가 큰 우선순위아닐까요?
현장에서 방향을 잘못잡고 들어가는 경우는 당연히 있을 수 있으나 30,40분 꼴아박으면서 붙잡고 있는거랑 2-3분 투자하고 빠른 방향전환하는 거는 아마추어와 프로의 차이입니다. 실력을 그대로 점수로 반영하려면 이런 100분 활용연습을 많이 하셔야합니다.

29번
16수능 21번 빼다박았고 어떠한 추가변형도 안했는데 틀렸다? 이건 그냥 그 기출 다시 푸시면 됩니다만 자꾸 어려운 n제 찾지마시고 기출 비스무리한 난이도로 무난하게 다만 많이 풀면서 학습하시기 바랍니다.
누구는 변형문제보면 어?하면서 반응하지만 그런 사람이 대다수일 순 없습니다. 비슷한 문제 4-5개는 더 풀어야 그 유형이 뚫리곤 합니다. 문제 더 푸세요

30번
문제는 쉬웠으나 솔직히 그냥 건들지를 않았거나 30번이니깐 무서워서 스스로 난이도를 높여서 봤거나 했었을 것 같습니다.
시사하는 바는 두 가지 같습니다.
1) 그냥 추세가 준킬러=킬러 느낌이므로 쫄지말고 건들여보자.
2) (만약)앞으로 이런 "현실적인, 열심히 공부하면 너도나도 풀 수 있는 난이도라면" 다 맞춘다는 느낌으로 킬러 학습을 꾸준하게 이어나가자

3.확통

글쎄요. 일단 저는 여기서 난이도가 더 높아질 수 있다고 봅니다. 아니면 평가원이 앞으로의 기조를 미리 소개한 걸수도 있구요. 기조가 만약 이렇게 유지된다면, 확통은 무조건 다맞게 준비해야하고 지금 이 난이도는 킬러라고 할문제가 단 한문제도 없는 난이도이기에, 다 맞히는 걸 떠나서 여기서 빠른 시간세이브를 통해 공통문제에서 미적-기하 친구들보다 시간적인 이득을 가져가야 합니다.

수학이 많이 약한 친구들은 더 노력해야겠지만 수학이 어느정도 되는 상위권 친구들은 수학을 100맞는다는 생각으로 무조건 가셔야하고 절대 확통에선 틀리면 안됩니다.

물론 이게 기조일지 그냥 실험일지는 아무도 모르기에 계속 확통공부는 해줘야겠지만, 이 6평시험을 통해 당연히 공부 비중은 공통>확통이 될 것 같습니다.
다만 “기출문제”정도는 다 풀 수 있고 풀이를 외울 정도로는 봐줬음 좋겠고 개인적인 생각으론 그간 모든기출보단 올해 9월,수능이 쉽게 나올 것 같습니다.

개인적으로 코멘트할 문제는 없고, 정답률 또한 그 사실을 말해주기에 다 맞췄으면 당연히 그랬어야했고 틀렸으면 기출학습 위주로라도 꼭 다시 해주고 쉬운 문제도 많이 풀어주시고 제발. 실수했으면 그 실수가 엄청 크다는 것을 인지하고 실수줄이기 혹은 검토학습에 만전을 기했으면 합니다.

[공통]

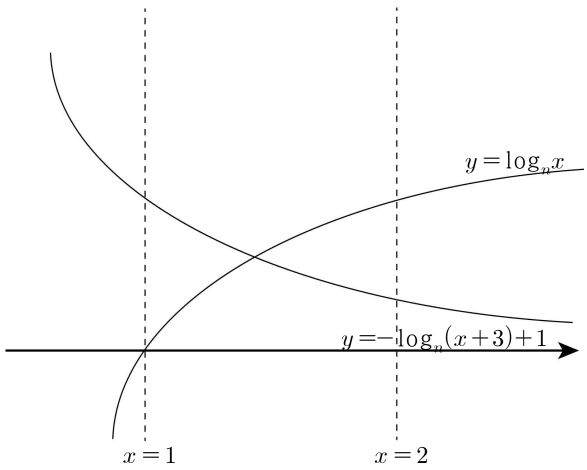
10. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y = \log_n x, \quad y = -\log_n (x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30　② 35　③ 40　④ 45　⑤ 50

로그함수가 등장했고 그래프가 그려져있지 않으므로 그래프를 그리고 시작하는 것이 맞다.
두 그래프를 각각 그려야하고, 문제에서 원하는 것처럼 교점의 x좌표가 1과 2사이에 있게 그려야 한다.



이제 이 상황을 수식으로 표현만 하면 된다.

1. $x=1$
$y=-\log_n(x+3)+1$의 함숫값이 $y=\log_n x$의 함숫값보다 크다.
$\therefore 0 < -\log_n 4+1$
$\therefore 4 < n$

2. $x=2$
$y=-\log_n(x+3)+1$의 함숫값이 $y=\log_n x$ 의 함숫값보다 작다.
$\therefore -\log_n 5+1 < \log_n 2$
$\therefore n < 10$

해서 $4 < n < 10$이므로 $n=5,6,7,8,9$가 돼서 합하면 35가 된다.

11. 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

(가) $g(x) = \begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1 < x < 0) \\ f(x) & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{17}{6}$　③ $\frac{19}{6}$　④ $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{23}{6}$

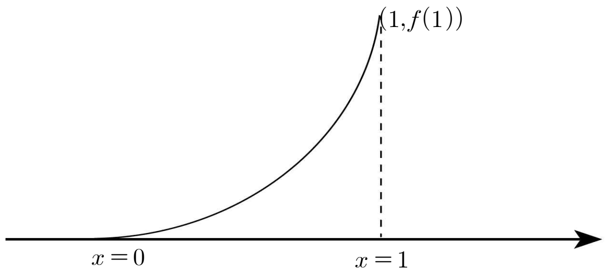
문제에서 “연속함수”라 했고 그 아래 조건에는 “정적분”이 있다.
정적분의 처리는 우리가 다음과 같이 고민했다.

1. 연산　2. 성질　3. 넓이(그래프)

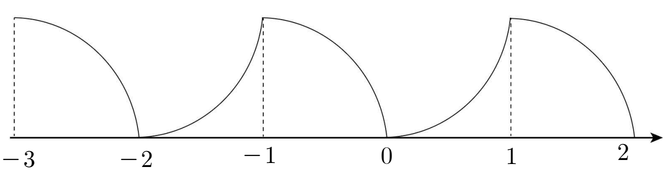
그런데, 연속함수라는 것은 다항함수를 보장할 수 없는 것이고 그러면 “1.연산”으로 접근할 수 없다. 해서 성질과 넓이 중에서 고민할텐데 딱히 대칭성언급도 없고 하니 넓이로 가보자.

그러면 곧 그래프를 그려서 가겠다는 것이고, 앞 조건 $f(0)=0, f(1)=1$ 모두 식제작용 조건이 아닌 그래프그리기용 조건임을 알 수 있다.

해서 그려보면 다음과 같다.



이제 $g(x)$를 보자. $g(x)$는 $-1 < x < 0$에서 $g(x)=-f(x+1)+1$인데, 이는 곧 $f(x)$를 왼쪽으로 1만큼 평행이동한 뒤 x축 대칭이동 후 다시 위로 1만큼올린 평행-대칭이동임을 알 수 있다. 또한 (나)조건에 의해 방금그린 두 그래프가 주기적으로 반복된다는 것을 알 수 있으므로 바로 그려주자.

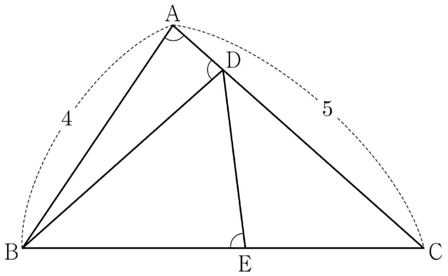


해서 $x=-3$부터 $x=2$까지의 넓이를 구하면 정답은 2번.

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

도형은 다음과 같은 기본적인 시각이 필요하다.

1. 삼각형 위주의 관찰 + 요소들체크(각,길이)
2. 세팅된 환경파악 및 성질 활용 후 풀이적용

풀어보자.
일단 큰 삼각형 ABC의 "요소들"이 주어져 있다.
두 변의 길이과 각 하나가 주어져있으므로 코사인법칙을 적용하자.
해서 $\overline{BC}=6$이 된다.

이제 세팅된 환경을 해석해보자.

문제에서 세 각이 같다고 했는데, 그 중 $\angle BAD = \angle BDA$는 삼각형 ADB가 이등변삼각형임을 이야기한다.
이등변삼각형이므로 $\overline{DB}=4$이고, 점 B에서 선분 AD에 수선을 내릴 수 있다. 그러면 $4\cos\angle BAC \times 2 = \overline{AD} = 1$임을 알 수 있다.
해서 $\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 4$이므로 삼각형 BDC도 이등변삼각형임을 알 수 있다.

그러면 마찬가지로 점 D에서 선분 BC에 수선을 내릴 수 있고 여기서 우리는 $\cos\angle DBC = \frac{3}{4}, \sin\angle DBC = \frac{\sqrt{7}}{4}$임을 알 수 있다.

이제 드디어 구하고자 하는 것을 볼텐데, 구하고자하는 것은 선분 DE의 길이고, 길이를 볼 것이 아니라 선분 DE를 포함한 삼각형을 볼텐데 여기서 요소가 충분히 주어진 삼각형 DEB를 관찰해보자.

삼각형 DEB에선 선분 DB와 $\angle DEB$가 주어져 있고 이 둘은 마주보는 선분과 각이다. 그리고 방금 우리는 $\angle DBC$의 정보를 구했고 그 각과 마주보는 선분 DE를 구해야한다. 즉! 삼각형의 요소관찰결과 사인법칙 바로 적용해주면 되겠다.

$$\therefore \frac{4}{\sin\angle DEB} = \frac{\overline{DE}}{\sin\angle DBE}$$

$$\therefore \frac{4}{\frac{\sqrt{63}}{8}} = \frac{\overline{DE}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{8}{3}$$

답은 3번.

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

바로 풀어보자.
주기함수 임을 줬으므로 x가 자연수인 모든 순간에 $f(x)$값은 1임을 알 수 있다.

그러면 묻는 값에서, $f(\sqrt{k})$ 중 $k=1,4,9,16$일 때에는 f의 값이 1이고 그 외에는 전부 3임을 알 수 있다.

즉 두 가지의 함숫값이 존재하니 따로따로 구해보자.

1) $k \neq 1,4,9,16$
$\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=k$이므로 다 더하면 180

2) $k=1,4,9,16$
$\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}=\frac{k}{3}$이므로 다 더하면 $\frac{1+4+9+16}{3}=10$

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
(나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

두 번째줄 연속인함수 $g(x)$에 주목해보자.
그러면 (가)식에서 $g(x)$식을 만들기 위해 양변을 x로 나눠볼 수 있다. (물론 $x\neq0$일 때.)
$\therefore g(x)=\frac{|xf(x-p)+qx|}{x}$
그런데, $x=0$에서도 연속이므로 $g(x)$의 0에서의 좌우극한값이 같아야 한다.
$g(x)=\frac{|x||f(x-p)+q|}{x}$에서,

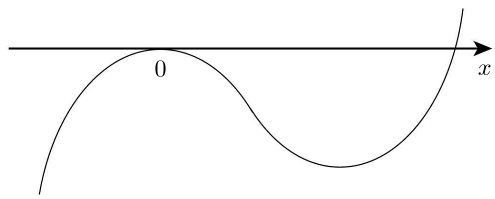
$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x|f(x-p)+q|}{x}=\lim_{x\to0^+}|f(x-p)+q|$

$\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x|f(x-p)+q|}{x}=\lim_{x\to0^-}-|f(x-p)+q|$

해서 두 극한값이 같으려면 $f(x-p)+q$가 $x=0$에서 0이어야함을 알 수 있다.

해서 삼차함수$f(x-p)+q$는 원점을 지나야 한다.

(나)에서, 평행이동한 삼차함수가 원점을 지나면서 동시에 한점에서만 미분이 불가능해야하므로 아래 개형만 가능하다.(p,q는 양수이므로 개형이 하나로 결정된다.)



$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -7을 가지므로 $(0,0)$을 지나는 것으로 해주려면 위로 7만큼 오른쪽으로 1만큼 움직이면 된다. $p=1, q=7$ $\therefore p+q=8$

14번 연습용1 : 과거기출

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은?
[4점][2019학년도 수능 나21]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

14번은 그냥 이 문제 판박이다.
“연속인 함수 $g(x)$” + “(가)조건 $f(x)g(x)$” + “그런데 (나)조건엔 $g(x)$”

14번 연습용2 : 자작문제

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{t}$가 존재한다.
(나) 모든 실수 k에 대하여 $\lim_{t\to k}\frac{h(t)}{g(t)}$가 항상 존재하게 하는 사차이하의 다항함수 $h(t)$에 대하여 $h(1)=0$이다.

$\frac{h(4)}{h(3)}$의 값을 구하시오.

한 3-4년전에 만든 문제같은데, 절댓값 등장 + 극한값 같다 로 해서 푸는 문제이다. (가)조건에 쓰인 것이 14번과 동일하다.

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

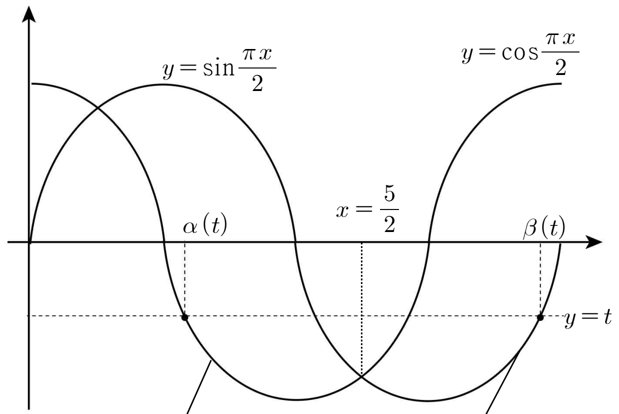
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 의 실근과 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$의 실근 중 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자 했다.

해서 두 그래프 $\sin\frac{\pi x}{2}$, $\cos\frac{\pi x}{2}$를 그린 뒤 $y=t$를 그려서 만나는 교점을 관찰해야한다.

들어가기에 앞서 삼각함수&그래프는 주기성,대칭성과 같은 성질위주의 관찰이 꼭 필요한다는 점 생각하고 문제를 풀어보자.

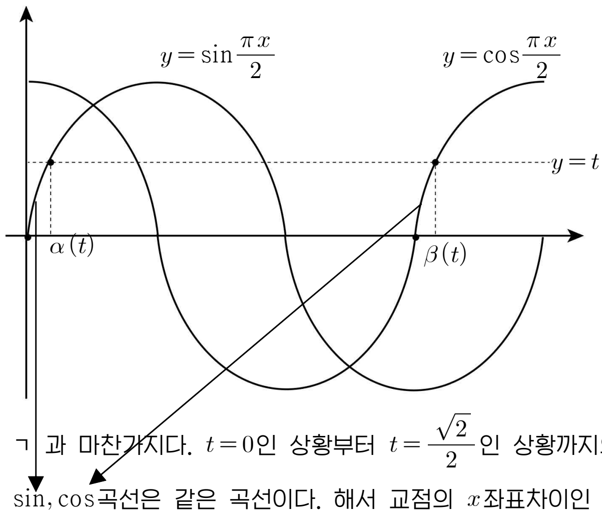
ㄱ. 참



$\sin$과 $\cos$은 같은 개형의 곡선이다. 위치만 평행이동했을뿐. 해서, $\alpha(t)$가 위치한쪽의 $\cos$곡선과 $\beta(t)$가 위치한쪽의 $\sin$곡선은 같은 곡선이 대칭된 모양이다.

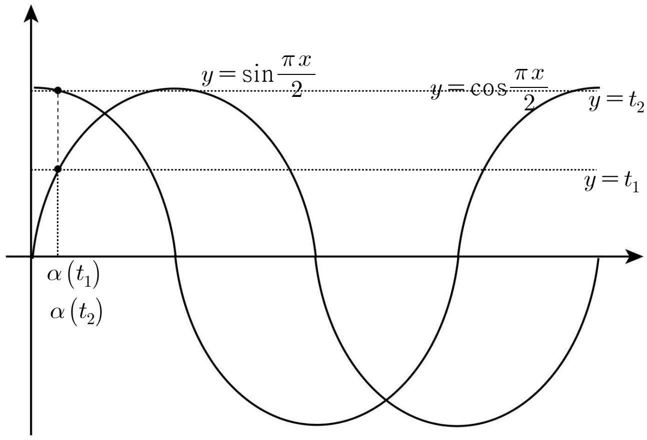
그림에서 각 곡선은 $x=\frac{5}{2}$대칭이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=5$로 일정하다.

ㄴ. 참



ㄱ 과 마찬가지다. $t=0$인 상황부터 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$인 상황까지의 $\sin$, $\cos$곡선은 같은 곡선이다. 해서 교점의 x좌표차이인 $\beta(t)-\alpha(t)$는 일정하다.

ㄷ. 거짓



문제에서 $\frac{1}{2}$이라는 값을 줬고, ㄱ,ㄴ과 다르게 그래프로는 풀이가 불가능하기 때문에 식풀이로 방향을 전환해보자.
(ㄱ,ㄴ,ㄷ 같은 경우 ㄱ,ㄴ이 식이였으면 ㄷ은 그래프, ㄱ,ㄴ이 그래프면 ㄷ은 식풀이를 묻는 경우가 많다. 항상은 아님.)
편의상 $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$라 하면
$t_2=\cos k$, $t_1=\sin k$가 된다.

$\therefore t_2-t_1=\cos k-\sin k=\frac{1}{2}$

묻는 것은 $t_1 \times t_2=\cos k \times \sin k$이므로 위 식의 양변을 제곱하자.

$\therefore 1-2\cos k\sin k=\frac{1}{4}$

$\therefore \cos k\sin k=\frac{3}{8}$

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4 dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

오직 하나의 극값을 갖도록 해야하므로 도함수의 부호변화가 1번만 있어야 한다. 그래서 바로 도함수를 구해줄텐데 알다시피 적분구간안에 x관련 식이 있으면 미분할 수 없다. 해서 식변형하고 가보자. 구간안 식을 전개한 후 x관련 식을 끄집어내주자.

[사실 이 문제를 못푼 친구들은 중-후반부 진행보다 이 미분자체를 못해서 틀린 경우가 많은데 이젠 통합수학 이기 때문에 과거 나형보다 더 많은 경험이 필요하다. 기존 가형친구들이였으면 많이 접해본 문제풀이도입부이다. 경험을 더 늘려야한다. 문풀 고고]

$$g(x)=f(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt-\int_a^x \{f(t)\}^5 dt$$

미분하면,

$g'(x)=f'(x)\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$가 된다.

곱형태식이므로 $f'(x)$의 부호변화와 $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$의 부호변화를 각각 관찰해보자.

1) $f'(x)$

$f'(x)=3x^2-24x+45=3(x-3)(x-5)$이므로 $x=3, x=5$에서 부호변화가 존재한다.

2) $\int_a^x \{f(t)\}^4 dt$

$f(t)$가 삼차함수이므로 이걸 4제곱하면 12차함수인데, 그냥 그렇게 해석하지말라고 출제자가 단단히 못박은 것 같다. 하지만 그렇다고 함수해석을 할 수 없는 건 당연히 아니다.

적분식을 하나의 함수로 관찰하면, 도함수는 $\{f(x)\}^4\geq 0$ 즉 항상 양수이다. 그러므로 적분식은 증가함수임을 알 수 있다.

또한 $(a,0)$을 항상 지나야하므로 종합하면 단순하게 "$(a,0)$을 지나는 증가함수"임을 알 수 있고 이는 곧 $x=a$에서만 부호변화가 존재한다는 것이다.

종합하면, $x=3,5,a$에서 부호변화가 있는데 이러면 조건에 부합하지 않으므로 $a=3$혹은 $a=5$가 되어야 한다. 정답은 3번.

20번 연습용 1 : 과거기출(1)

최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt - xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$의 값은?

[4점][2020년 10월 나20]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

완전 똑같은 발문. "1개의 극값만 가진다." 너무 쉽다.

20번 연습용 2 : 과거기출(2)

실수 $a(a>1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-a)$$

라 하자. 함수

$$g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t^2 f(t)dt$$

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값은?
[4점][2021학년도 수능 나20]

① $\frac{9\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

직전 수능 기출문제를 6개월 뒤에 그대로 내줬는데
못푼 수험생이 있다? 도입부적분구간처리 외의 요소로
틀렸으면 그냥 6월까지 공부안한 것.

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다. (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

(가)

주어진 방정식의 실근은 $x^n=64$인 순간과 $f(x)=0$인 순간이다. $x^n=64$인 순간부터 관찰해보자.

관련한 내용은 "지수-거듭제곱근"파트에서 아주 잘 배웠다. 보자마자 n을 홀수/짝수로 나눠서 생각해야하는 것이 맞다.

n이 짝수라면 $x^n=64$의 실근은 무조건 2개다.

n이 홀수라면 $x^n=64$의 실근은 무조건 1개다.

그런데, 조건에서 방정식의 실근은 서로 다른 두 실근이며 모두 중근이라 했으므로 $x^n=64$에서 두 개의 실근이 나와줘야 하고 그 두 개의 실근이 $f(x)=0$의 실근이 되어줘야한다.

$\therefore n=$짝수

(나)

$f(x)=0$의 실근이 두 개인 것이 확정인 상황에서 최고차항이 1인 것도 주어졌으므로 최솟값은 당연히 음수이다. 해서 음수보다는 음의 "정수"인 것에 주목하는 것이 맞다. 이제 답을 내보자.

$x^n=64$에서 $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$

$\therefore f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$

해서 최솟값은 $x=0$일 때이다.

$\therefore f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$

정수이려면 n은 12의 약수여야하므로 $1,2,3,4,6,12$가 되고 이 중 홀수를 제외하면 $n=2,4,6,12$가 된다.

더하면 24가 정답.

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

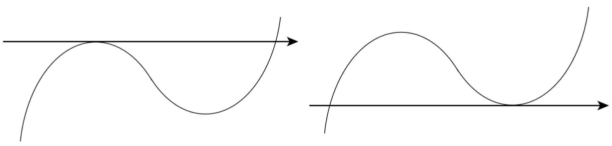
$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

일단 (가), (나) 조건 모두 "서로 다른 실근의 개수"를 언급했으므로 두 가지 발상이 가능하다.

1. 방정식 풀이
 = $f(x)$를 그려서 x축과의 교점을 눈으로 관찰
 = $f(x-f(x))$를 그려서 x축과의 교점을 눈으로 관찰

2. 곡선& 직선
 = 곡선식과 직선식이 등장하면 각각 그려서 교점 관찰하되 접선의심위주로 관찰

일단 (가)조건은 바로 그래프그릴 수 있으므로 그려보는 것이 맞다. 두 실근 가져야 하므로 보통 아래 두그래프를 그려본다.



그런데, 문제는 무엇이냐, 개형은 확정이고 "x축에 접하는 순간이 있다"와 같은 위치까진 확정인데, x축과 어디서 접하는지 즉 좌우방향으로의 위치는 확정이 되어있지 않다. 심지어 주어진 3개의 $f(x)$정보들은 $f(x)$의 위치를 결정하는데에 유의미한 정보를 주지 않는다.

왜 $f(x)$의 위치가 중요하냐. (나)조건에서, $x-f(x)$를 그려낼 수 있어야 직접합성해서 $f(x-f(x))$를 그려낼텐데 "x"$-f(x)$이므로 $y=x$와 $y=f(x)$의 위치관계가 나와줘야한다. 그런데 $f(x)$의 위치를 모르므로 그려낼 수 없다.
[여기서 방향을 바꿔줘야한다. 합성함수를 직접그려보려는 행위는 "미적분"선택자면 당연히 해볼 수 있는 행위라 생각하고 나도 그렇게 처음에 접근했다. 그런데 안되면 방향을 바로 돌릴 수 있어야하고 그러지 못하고 잘못된 접근에 매몰되어 시간 싹다 날리면 아직은 모의고사에 있어서는 아마추어다.]
합성함수의 본 처리방법인 치환으로 가보자.

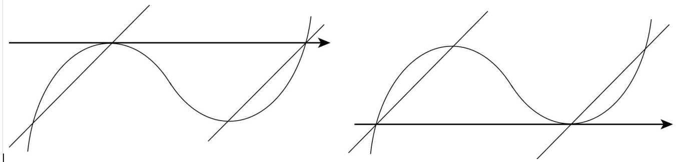
일단 $f(x)=0$의 두 실근을 α, β라고 한뒤에 풀어보자.
$f(x-f(x))$에서, $x-f(x)=X$로 치환해보자.

즉, (나)에서 $f(X)=0$의 실근이 3개이므로
$X=\alpha, X=\beta$의 실근이 3개가 된다.

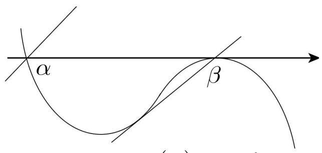
이제 치환을 풀어주면, $x-f(x)=\alpha, x-f(x)=\beta$가 되고
이 둘의 실근 개수의 합이 3이 되어야 한다.

그런데, 원래는 $x-f(x)$를 그린 뒤에 $y=\alpha, y=\beta$를 그어서 교점개수를 확인하겠지만, 당장 $x-f(x)$가 그려지지 않기에 여기까지 왔으므로 다른 방법을 찾아보자.
식을 변형해주면,
$x-\alpha=f(x)$, $x-\beta=f(x)$가 될텐데 이는 곧 곡선&직선이므로 $f(x)$그려준 뒤에 $y=x-\alpha, y=x-\beta$를 각각 그려 교점개수를 확인해주면 된다.

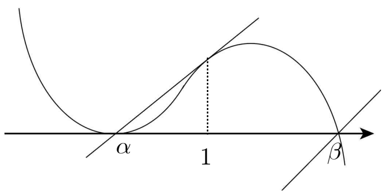
최고차항계수가 양수인 것부터 해보자.



개형에 따라 교점의 개수는 바뀌겠지만 교점개수가 3개는 나오지 않는다. 해서 최고차항의 계수가 음수인 것으로 가보자.



이 개형 같은 경우 $x-\beta$가 $f(x)$에 접하는 직선이면 교점개수가 3개로 나온다. 다만 접점의 x좌표가 1이어야하는데($\because f'(1)=1$) $f(1)>0$이므로 조건을 만족하지 않는다.(접점이 아녀도마찬가지)
해서 아래 개형이 맞다.



참고로, 직선의 기울기가 1이고 접점의 y좌표가 4이므로 $1-\alpha=4$가 된다. 해서 $\alpha=-3$.
이제 식을 뽑아보자.
$f(x)-(x+3)=k(x+3)(x-1)^2$
$f(x)=k(x+3)(x-1)^2+(x+3)$
$f(x)=(x+3)\{k(x-1)^2+1\}$
그런데 $f(x)$는 $(x+3)^2$을 인수로 가져야 한다.
해서 뒷인수 $\{(x-1)^2+1\}$에 $x-3$을 대입하면 0이 나와야한다.
해서 $k=-\frac{1}{16}$임을 쉽게 알 수 있다.
답은 $f(0)=$

22번 연습용 문제 (1) : 자작문제1

이차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체에서 미분가능한 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ x^3-3x^2+4 & (x>1) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g'(g(x))=0$이 홀수개의 실근을 갖을 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은?

① $\frac{21}{8}$ ② $\frac{23}{8}$ ③ $\frac{25}{8}$ ④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 4

★합성함수연습용 문제입니다.
22번처럼 실근개수가 언급되었으니 그래프를 그려볼 생각하는 것이 맞습니다.

22번 연습용 문제(2) : 자작문제2

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{12}$이고 $x=1$에서 극댓값을 가질 때, 임의의 실수 t에 대하여 방정식 $f(f'(x))=t$ 의 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 두 조건을 만족한다.

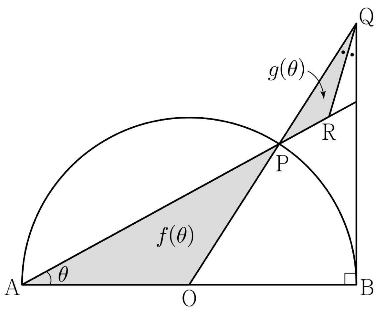
(가) 함수 $g(t)$는 오직 두 점에서만 불연속이다.
(나) 집합 $\mathrm{A}=\{a|g(t)=a\}$의 모든 원소의 합은 15이다.

$f(1)-f(0)$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p,q는 서로소인 자연수이다.)

★합성함수연습용 문제입니다.
직접합성이 안되면 뭐다?

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, $\angle$OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{OAP} = \theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

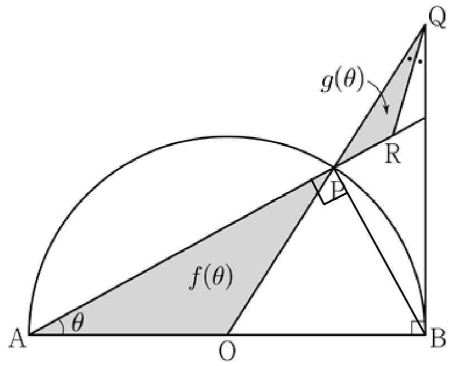
$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$) [4점]



① 2 ② $\dfrac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 4

도형극한은 삼각함수파트와 마찬가지로 삼각형위주의 관찰이 필요하다. 그러므로 어떤 길이를 구할 때, 그 길이를 포함한 삼각형을 관찰해야하고, 그 삼각형이 각도를 포함한 직각삼각형인지 아니면 길이와 각이라는 요소가 적절하게 주어진 삼각형인지를 봐서 이후 풀이방향을 정해주면 된다.

$f(\theta)$부터 구해보자.
일단 원의 성질을 적용해서 점 P와 선분 AB를 연결, 직각삼각형을 만들어주자.



그림에서, $\overline{\mathrm{AO}} = 1$, $\overline{\mathrm{AP}} = 2\cos\theta$ 이므로
$f(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin\theta \times 1 \times 2\cos\theta$임을 알 수 있다.

이제 $g(\theta)$를 구해볼텐데, 일단 삼각형 OBQ에 주목해보자. 직각삼각형이면서 동시에 $\angle \mathrm{QOB} = 2\theta$이므로 각도가 존재하는 직각삼각형이다. 해서 $\overline{\mathrm{BQ}} = \tan 2\theta$, $\overline{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{\cos 2\theta}$의 길이를 잡고 들어갈 수 있다.
여기에서, $\overline{\mathrm{OP}} = 1$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{\cos 2\theta} - 1$가 구해진다.

또한 $\angle \mathrm{QPR} = \angle \mathrm{APO} = \theta$이다. 즉 삼각형 PRQ의 한변과 한 각을 구했으므로, 다른 한변만 구해주면 $g(\theta)$를 구할 수 있다.

그런데, 삼각형 PRQ는 직각삼각형이 아니므로 방금까지해왔던 직각삼각형에서의 길이표현보단 사인법칙-코사인법칙으로 접근해보자.

$\angle \mathrm{QPR} = \theta$, $\angle \mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{4} - \theta$ 이므로 $\angle \mathrm{QRP} = \dfrac{3}{4}\pi$가 된다.
이 각과 마주보는 변인 PQ의 길이를 우리가 알고 있다.
$\overline{\mathrm{PQ}} = \dfrac{1}{\cos 2\theta} - 1.$
즉 사인법칙으로 가면 된다.

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin \angle \mathrm{QRP}} = \frac{\overline{\mathrm{PR}}}{\sin \angle \mathrm{PQR}}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{PR}} = \frac{\left(\dfrac{1}{\cos 2\theta} - 1\right) \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right)}{\sin \dfrac{3}{4}\pi}$$

해서, $g(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{PR}} \times \sin\theta$

$$g(\theta) = \frac{(1 - \cos 2\theta)^2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) \times \sin\theta}{2 \times (\cos 2\theta)^2 \times \sin \dfrac{3}{4}\pi}$$

다계산하면 정답은 1.

29. $t>2e$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$ 이 $x=k$ 에서 극대일 때, 실수 k 의 값을 $g(t)$ 라 하면 $g(t)$ 는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$ 인 실수 α 에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

극대라 했으므로 도함수부호변화를 체크하자.
도함수를 구해보자.

$f'(x)=2t(\ln x)\frac{1}{x}-2x$

부호변화를 쉽게 확인하기 위해 통분해주면,

$f'(x)=\frac{2t\ln x-2x^2}{x}=\frac{2(t\ln x-x^2)}{x}$

해서 $t\ln x-x^2=0$ 를 만족하는 순간이 극값을 갖는 순간이 된다. 그 때의 x값을 k라 하자 했고 k의 값을 $g(t)$라 하자 했으므로 $x=g(t)$는 $t\ln x-x^2=0$의 실근이 된다.

해서. 대입하면 성립함을 알 수 있고
$t\ln g(t)-\{g(t)\}^2=0$ 이라는 관계식을 얻었다.
$g(t)$를 직접 구할 수는 없으니 이 관계식을 활용해서 정보를 추가적으로 얻거나 알고 있는 정보를 적용해야할 것이다.

1. $g(\alpha)=e^2$
이 정보를 활용하기 위해 준식에 $t=\alpha$를 대입해보자.
$\therefore \alpha\ln g(\alpha)-\{g(\alpha)\}^2=0$
$g(\alpha)=e^2$이므로,
$\therefore \alpha\times 2-e^4=0,\ \alpha=\frac{e^4}{2}$

2. $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2$
α는 구해놨고, $g'(\alpha)$만 구하면 된다. 도함수가 필요하므로 준식을 미분해보자.
$\ln(g(t))+\frac{tg'(t)}{g(t)}-2g(t)g'(t)=0$
여기에 $t=\alpha$를 대입하면,
$2+\frac{e^4g'(\alpha)}{2e^2}-2e^2g'(\alpha)=0$
$\therefore g'(\alpha)=\frac{4e^2}{3}$
$\therefore \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{8}{9}$ 답은 17

29번연습용 문제 (1) : 과거기출

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은? [4점][2016학년도 수능 가21]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

"만나는 점"이 언급되었으면, 교점이라는 것이므로
1. 주어진 점을 함수에 대입하면 성립한다.
2. 대입한 y값은 같다. $y_1=y_2$
에서 골라풀자.

29번연습용 문제 (2) : 자작문제

곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=tx$의 교점 중 x좌표의 크기가 큰 것을 $\mathrm{P}(f(t),\, tf(t))$라 하고 점 P의 x축에 내린 수선의 발을 점 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'\left(\frac{2}{e^2}\right)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

① $-\frac{1}{2}e^4$ ② $-e^4$ ③ $-\frac{3}{2}e^4$ ④ $-2e^4$ ⑤ $-\frac{5}{2}e^4$

$f(t)$를 직접 구할 수는 없으므로 $f(t)$의 관계식을 구한뒤에 풀어야 한다.6월모의고사에선 $g(\alpha)=e^2$처럼 "정보"를 대놓고 줬지만 이 문제는 정보가 없다. 그러면 어떻게 해야할까?

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

주어진 초월함수의 도함수와 이계도함수를 구해서 함수를 직접그려보는 방법도 있겠지만 그렇게 해서 그린다한들 두 점 사이의 거리를 "그래프"를 통해 구할 방법은 없다.

해서 "두 점사이의 거리" 글자그대로 두 점사이의 거리를 식으로 구할 생각을 했어야 한다.

물론 교점 두 개를 구해서 좌표를 하나하나 구해서 거리공식을 쓰는 것말고 $y=x+t$의 기울기가 1이므로 두 교점의 x좌표 차이만 구한 뒤에 $\sqrt{2}$를 곱해서 교점사이의 거리를 구하는게 낫다.

그럼 교점을 구하기 위해 연립하자.

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

$1+e^{2x}-e^{-2t}=e^x\times e^t$

한쪽으로 몰아서 정리해주면,

$e^{2x}-e^te^x+1-e^{-2t}=0$

여기서 $e^x=k$로 치환해주면 이쁜 이차방정식이 된다.

$\therefore k^2-e^tk+1-e^{-2t}=0$

근의 공식을 써도 되고, 인수분해를 해도 된다.

해서 k를 구해주면,

$k=e^t-e^{-t},\ k=e^{-t}$ 이 된다.

그런데, $k=e^x$이었고, 두 실근을 $x=\alpha, x=\beta$라고 하면

$e^\beta=e^t-e^{-t},\ e^\alpha=e^{-t}$ 이 된다.

우리가 결국 구해야할 것은 $\sqrt{2}(\beta-\alpha)$이고

그러려면 $\beta-\alpha$가 필요하므로 위 두식을 나눠주면 된다.

$\therefore e^\beta\div e^\alpha=e^{\beta-\alpha}=e^{2t}-1$

$\therefore \beta-\alpha=\ln(e^{2t}-1)$

$\therefore f(t)=\sqrt{2}(\beta-\alpha)=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

$\therefore f'(\ln 2)=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

정답은 11

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187　② 190　③ 193　④ 196　⑤ 199

주사위를 던졌을 때 4,5,6 이 나오면 0점이므로 0점을 얻는 경우는 3가지가 있다.
이말은 즉슨 점수가 1,2,3과 0이 나오는 경우의 수가 다르고 점수의 구성이 어떻게 되느냐에 따라 경우의 수가 달라지므로 한 번의 수식으로 풀 순 없고 점수 구성에 따른 케이스를 나눠야 한다. 또한, 네 번 던졌으므로 순서가 있는 것을 생각하고가보자.

네 점수의 합이 4가 되려면 다음과 같다.
1. $(3,1,0,0)$
2. $(2,2,0,0)$
3. $(2,1,1,0)$
4. $(1,1,1,1)$

1. $(3,1,0,0)$
3과 1은 경우의 수가 1개씩이니 생각할 필요가 없고
0점이 나오는 경우는 3가지씩이었으므로
점수가 나오는 경우의 수는 $1\times1\times3\times3$가 된다.
그런데, 순서가 존재하므로 $3,1,0,0$을 배치하는 순서는
$\frac{4!}{2!}=12$가지가 된다.
$\therefore 1\times1\times3\times3\times12=108$

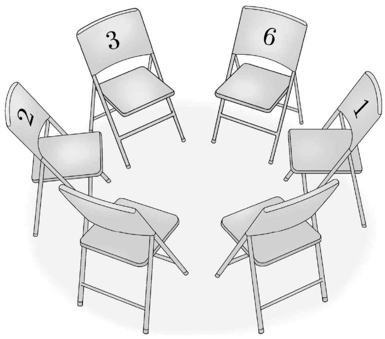
2. $(2,2,0,0)$
마찬가지로 해주면 점수가 나오는 경우의 수는 $1\times1\times3\times3$
이고 순서배치는 $\frac{4!}{2!\times2!}$이 된다. 해서 6가지.
$\therefore 9\times6=54$

3. $(2,1,1,0)$
점수가 나오는 경우는 3가지
순서배치는 12가지
$\therefore 3\times12=36$

4. $(1,1,1,1)$
점수나오는 경우의 수는 1가지, 배치도 1가지
해서 총 1가지

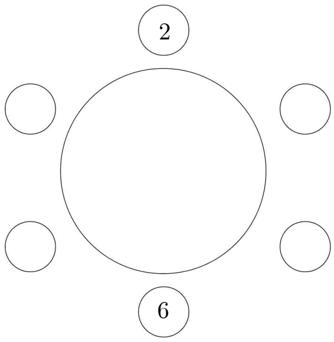
$\therefore 108+54+36+1=199$

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



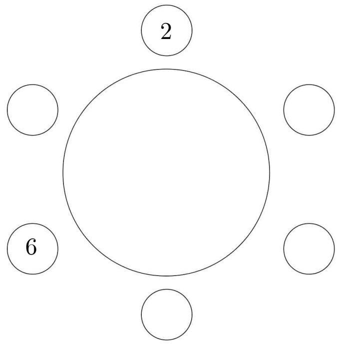
생각해야할 것은 두 개다. 즉 조건이 두 개다.
일단 2와 6이 이웃하면 안되고 3과 4도 이웃하면 안된다.
그렇다고 여사건이냐? 여사건으로 가려면 전체에서
2와 6이 이웃하는 것 따로/ 3과 4가 이웃하는 것 따로
2와 6, 3과 4 이웃하는 것 따로/ 다 계산해야하므로
조금 힘들 것 같다.

그러면 어떻게 할까. 따져야할 조건이 두 가지 이므로
한번에 따지려 하지말고 순서부여해서 차례차례 하자.
즉 2와 6이 이웃하지 않는다. → 3과 4가 이웃하지 않는다.
순으로 처리하자.
그런데, 2와 6이 이웃하지 않는 경우는 크게 두 가지
종류가 있고 각 종류에 따라 3,4가 앉을 자리가 달라지므로
케이스를 나눠보자.
1.



이러면 남는 자리는 총 4가지이고 $3,4$가 이웃하지 않는
경우만 세주면 된다. 그런데, 남는 자리를 조건없이
나열하는 경우는 $4!$이고 $3,4$가 이웃해서 앉는 경우는
$4\times 2!$이므로 원하는 경우의 수는 $4!-(4\times 2!)=16$이 된다.
(여사건풀이)

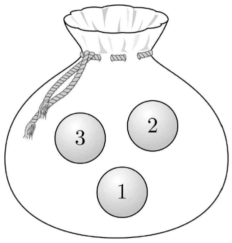
2.



(6이 반대편에도 앉을 수 있으니 $\times 2$는 생각하고시작)
이러면 역시 조건없이 나열하는 경우는 $4!$이고
남는 자리에 $3,4$가 이웃하여 앉는 경우는 $4\times 2!$이므로
총 경우의 수는 $2\times\{4!-(4\times 2!)\}=32$가 된다.

해서 1번 케이스와 2번 케이스를 더해주면 정답은 48

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다.
이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



5개의 수의 곱이 6의 배수라고 했는데, 6의 배수는
$6\times k$, 즉 $2^1\times 3^1\times k$이므로 2,3을 한 개 이상 갖는 수이다.
그러므로 2,3을 한 개이상씩 갖고 있는 모든 수를 다 따져야하고
심지어 "5번 반복"이므로 순서까지 다 따져야하니 경우가
너무 복잡하다. 해서 하나하나 세느니 여사건으로 접근해보자.

여사건은 세 가지 경우가 존재한다.
1. 2,3이 모두 없는 경우
2. 2만 없는 경우
3. 3만 없는 경우

1. 1로만 구성되어야 하므로 가능한 경우의 수는 1
2. 1,3으로만 구성되어야하므로 가능한 경우의 수는 2^5-1
3. 1,2로만 구성되어야 하므로 가능한 경우의 수는 2^5-1
해서 총 경우의 수는 63이 된다.

$\therefore \frac{63}{3^5}=\frac{63}{243}=\frac{7}{27}$

여사건이므로 1에서 빼주면 정답은 $\frac{20}{27}$. 답은 47