2015학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 쉬운 문항 해설 by 물량공급 09.04

1번 $8\times2=16$

2번 A의 모든 성분의 합은 4, 따라서 $3\times4=12$

3번 $\frac{5}{1}$

4번 $1+2+3+1+1=8$

5번 $a_5=a_3r^2=12\times2^2=48$

6번 $\int_0^1 3x^2dx=1$

7번 $P(A\cap B)=0$, $P(A)=a\,,P(B)=b$라 할 때 $a+b=4b=1$

$a=\frac{3}{4}$

8번 $2+2=4$

9번 $P(2학년|여학생)$

$$=\frac{P(2학년\cap 여학생)}{P(여학생)}$$

$$=\frac{70}{130}=\frac{7}{13}$$

10번 $\log(\frac{7t_0}{2t_0}-1)=k+4\log2$

$\log(\frac{5}{2})-4\log2=k$

$k=1-6\log2$

11번 $A(0,1)\,,B(0,\,-1),\,C(3,1),\,D(-1,1)$

넓이 $=4$

12번

참고.

양의 약수의 개수)

a,b,c가 소수이고 ,m,n,p 가 자연수 일 때 $a^mb^nc^p$의 약수의 개수는

$(m+1)(n+1)(p+1)$

양의 약수의 총합)

a,b,c가 소수이고 ,m,n,p 가 자연수 일 때 $a^mb^nc^p$의 약수의 총합은

$(\sum_{k=0}^{m}a^k)(\sum_{k=0}^{n}b^k)(\sum_{k=0}^{p}c^k)$

따라서 $a_n=(n+1)(n+2)$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

13번

$f(m)$이 양수이기 위한 m의 값은 $1,2$

2가지 이다.

A에 대하여 $P(A)=\frac{2}{6}$

한편 확률변수 X는 시행횟수가 15이고 일어날 확률이 $P(A)=\frac{1}{3}$인 이항분포를 따른다.

즉 $B(15,\frac{1}{3})$, 이 때 $E(X)=15\times\frac{1}{3}=5$

14번

$f(x)=ax(x-3)$이라 하자

정적분과 무한급수의 원리에 따라 주어진 식은 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^2-3ax)dx=\frac{7}{6}$

$a=-1$ 이므로 , $f'(0)=3$

15번

$2^5 = 32, 2^6 = 64, 2^7 = 128$이므로

네 개의 자연수 $1, 2, 4(=2^2), 8(=2^3)$ 중 세 수를 선택 하였을 때 , 2의 지수의 합이 7보다 작아야 한다.

전체 경우의 수는 네 개의 자연수 중 중복을 허락하여 세 수를 선택하는 경우의 수 이므로

${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = 20$

그 중 세 수를 선택하여 곱할 때 100보다 큰 경우는

$(2^3,2^3,2^3), (2^3,2^3,2^2), (2^3,2^3,2^1), (2^3,2^2,2^2)$

4가지 뿐이다.

따라서 $20-4=16$

16번

(*)에서 ㉠을 빼면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = (\sum_{k=1}^{n} S_k) - (\sum_{k=1}^{n-1} S_k) = S_n$$

이므로 $\frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{n} S_n$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{(가)}{n}$$

따라서 (가)는 $(n+1)^2$

$$S_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdots \frac{S_3}{S_2} \times \frac{S_2}{S_1} \times S_1$$
$$= \frac{n^2}{n-1} \times \frac{(n-1)^2}{n-2} \times \frac{(n-2)^2}{n-3} \times \cdots \frac{3^2}{2} \times 2$$
$$= n^2 \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots 3 \times 2 \times \frac{1}{2}$$
$$= n \times (n!) \times \frac{1}{2}$$

따라서 (나)는 $\frac{n}{2}$

17번

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

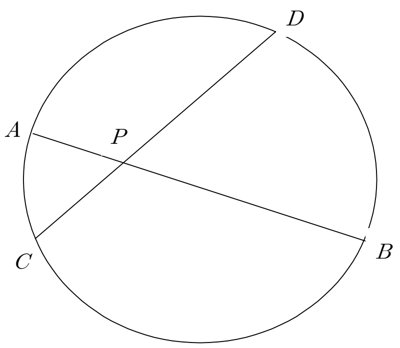
$x=2$ or $x=0$일 때 극값을 갖는다.

$f(2) = a-4$
$f(0) = a$

이므로 $a(a-4) = -4, a=2$

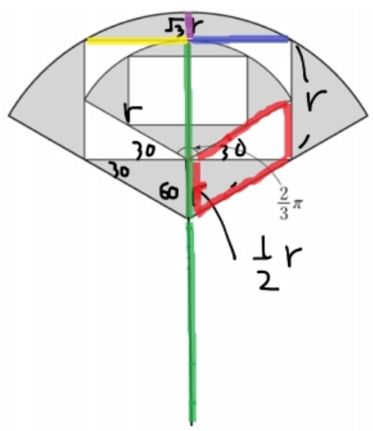
18번

참고) 중학교 3학년 원과 비례
(=방멱의 정리)



$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

부채꼴 내부의 직사각형에 내접하는 부채꼴의 반지름을 r이라고 하자.



특수각을 이용하면 빨간 평행사변형의 작은 변의 길이는 $\frac{r}{2}$임을 알 수 있다.

(긴변은 r)

따라서 보라색 선의 길이는

$1-(\frac{r}{2}+r)=1-\frac{3}{2}r$

초록색 선의 길이는

$1+(\frac{r}{2}+r)=1+\frac{3}{2}r$

노란색 선의 길이와 초록색 선의 길이는

$\frac{\sqrt{3}}{2}r$

이므로 방멱의 정리를 사용하면

$\left(\frac{3}{4}r^2\right)=\left(1-\frac{3}{2}r\right)\left(1+\frac{3}{2}r\right)$

$r^2=\frac{1}{3}$

한편 R_1에서 직사각형의 넓이는 $\sqrt{3}\,r^2$이므로 R_1에서 얻어지는 넓이 S_1은

$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$

19번

ㄱ $(A+E)B=2E-A$
$(A+E)B+A+E=3E$
$(A+E)(B+E)=3E$

이므로 $(A+E)$의 역행렬은 존재한다.
(참)

ㄴ $(A+E)(B+E)$
$=AB+A+B+E$
$=3E$
$=(B+E)(A+E)$
$=BA+A+B+E$

따라서 $AB=BA$

ㄷ $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)=O$

$A+E$의 역행렬이 존재하므로

$A^2-A+E=O$

$A^2=A-E$

한편 $A(AB+A+B)=2A$

$A^2B+A^2+AB=2A$

$(A-E)B+(A-E)+AB=2A$

$A+B=2AB-E$

이식을 다시 $AB+A+B=2E$에 대입하면

$AB=E$, $A+B=E$가 도출된다. (거짓)

20번

작년에 운행된 택시의 연간 주행거리를 확률변수 X라 할 때 확률변수 X의 모표준편차를 σ라 하자

X의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$E(\overline{X})=m=\overline{x}$

이고 $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{4}$

따라서 $c=1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=0.49\sigma$

$P(X\le m+c)$
$=P(X\le m+0.49c)$
$=P(Z\le 0.49)$
$=0.5+P(0\le Z\le 0.49)$
$=0.6879$

21번

$f(x)$에 대하여 x에 대한 최고차항의 차수가 4차 이상의 다항식이라고 하자

$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(2x^3-2)\right)=\infty>0$ 이므로

보기 (나)와 모순된다.

따라서 $f(x)$는 상수함수, 일차함수, 이차함수, 삼차함수로 가정할 수 있다.

1) $f(x)$가 상수함수인 경우

$f(0)=f(x)=-3$이다.

그런데 $x>\frac{1}{2}$에서 $f(x)<6x-6$이므로

보기 (나)와 모순된다.

2) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(x)=x-3$이다.

그런데 $x>\frac{3}{5}$에서 $f(x)<6x-6$이므로

보기 (나)와 모순된다.

3) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)=x^2+ax-3$으로 가정할 수 있다.

$x=1$에서 $6x-6=2x^3-2=0$이고

$y=2x^3-2$ 위의 점 $(1,0)$에서 접선의 방정식은 $y=6x-6$이므로 $f(1)=0$이어야 한다.

이를 만족하는 a값은 2이다.

그런데 $g(x)=f(x)-(6x-6)=x^2-4x+3$라 하면 구간 $(1,3)$에서 $g(x)<0$이므로 보기(나)와 모순된다.

4) $f(x)$가 삼차함수인 경우

$f(x)=x^3+bx^2+cx-3$로 가정할 수 있다.

$f(1)=0$이어야 하므로 $b+c=2$

$f'(x)=3x^2+2bx+c$ 이고, $x=1$에서

$6\le f'(x)\le 6x^2$이 성립해야, 보기(나)가 성립한다. 따라서 이 때 $f'(1)=6$ 이다.

$2b+c+3=6$ 이므로 $c=b=1$

따라서 $f(3)=36$

22번

$\frac{27}{1}=27$

23번

$x=-1, y=2$ 를 넣어 계산하면 $a=b=4$

24번

$a_1+a_{10}=a_2+a_9=a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6=22$

따라서 $22\times4=88$

25번

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)=a$ 이어야 하므로

$\lim_{x\to3}f(x)=11$

26번

양변을 미분한다.

$f(x)=3x^2+4$

$f(10)=304$

27번

곡선위의 점P를 (x,y)라 하면 P와 직선사이의 거리는

$$d(x)=\frac{\left|x-\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}-10\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

절댓값 안의 식이 양수라고 가정하고 미분하면 $\frac{d(d(x))}{dx}=\frac{1-x^2}{\sqrt{2}}$

$x=1$ 또는 $x=-1$에서 극값을 갖는다.

$x>0$일 때 그래프의 개형을 그려서 $d(x)$의 부호를 판단하면 $x=1$ 에서 $d(x)$가 극소값이자 최소값을 가짐을 알 수 있다.

이 때 P의 좌표는 $(1,4)$이므로 답은 5

28번

원 밖의 한 점P 와 반지름이 r인 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}$의 최솟값은 점P와 원의 중심 사이의 거리 $-r$

최댓값은 점P와 원의 중심 사이의 거리 $+r$ 이다. (고1 교과서 참조)

원의 방정식은

$(x-3n)^2+(y-3n)^2=(3n)^2$

이므로

$a_n = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n$

$b_n = \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}-3n$

이다

야매Tip

n이 양의 무한대로 발산 하는 경우, 극한값을 계산할 때 루트 안의 이차식에 대하여 완전제곱식으로 근사하여 계산해도 극한값은 같다.
예를 들어

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{(3n)^2+(4n+1)^2}+3n \\ &= \sqrt{25n^2+8n+1}+3n \\ &\approx \sqrt{(5n+4)^2}+3n \\ &\approx 8n+4 \end{aligned}$$

같은 방법으로 $b_n \approx 5n+4-3n=2n+4$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+4}{2n+4}=4$

29번
연속확률변수 X에 대하여 확률밀도함수를 $f(x)$라 하자

$\int_0^3 f(x)dx=1=3a$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$

한편 $\mathrm{P}(x \le X \le 3)=1-\frac{x}{3}$

$$=\int_x^3 f(x)dx$$

이므로 양변을 미분하면 $-\frac{1}{3}=-f(x)$

따라서 확률변수 X의 확률밀도함수

$f(x)=\frac{1}{3}\ (0 \le x \le 3)$

$P(0 \le x \le \frac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{9}$

30번

열심히 풀어봅니다.