- 수열은 함수다

수열도 n번째 항에 해당하는 값이 하나로 대응되는 일종의 함수로 볼 수 있다. 다만 함수의 정의역이 자연수가 될 뿐!

- 고로 등차수열은 일차함수로 볼 수 있다.

등차수열은 n앞에 d가 붙은 일차식으로 볼 수 있다. d는 일차식의 기울기이기도 하다. 일차식이라서, 등차수열의 합은 (항 평균)*항의 개수라는 것을 잊지 말자.

- 등차수열의 합 S_n은 상수항이 없는 n에 대한 이차식이다.

S_n을 쉽게 구하는 방법이 있다. $a_n = dn + c$ 꼴이라고 하면, 일차항 dn을 적분하듯이 해서 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + Cn$으로 두고, 대문자 C는 $a_1 = S_1$이 되도록 맞춰주면 된다. 여기서는 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (\frac{d}{2} + c)n$이 되겠다.

재밌는 것은, S_n이라는 (나름의) 이차함수를 그려봤을 때 꼭짓점의 x좌표가 자연수 k라면 $a_k = -a_{k+1}$이라는 관계가 성립하고, 꼭짓점을 기준으로 좌우가 대칭인 이차함수(꼭짓점의 x좌표가 $\frac{2k+1}{2}$꼴)라면 $a_x = 0$인 자연수 x가 존재하는 등차수열이라는 점이다. 직접 그려서 확인해봐라.

- 수열에 절댓값을 붙인 합과 그냥 수열의 합을 비교할 때

$$\sum a_n = A, \qquad \sum |a_n| = B$$

인 경우 수열 a_n 중 음수인 항들의 총합이 (A-B)/2가 된다는 것을 알아채야 한다. 반대로

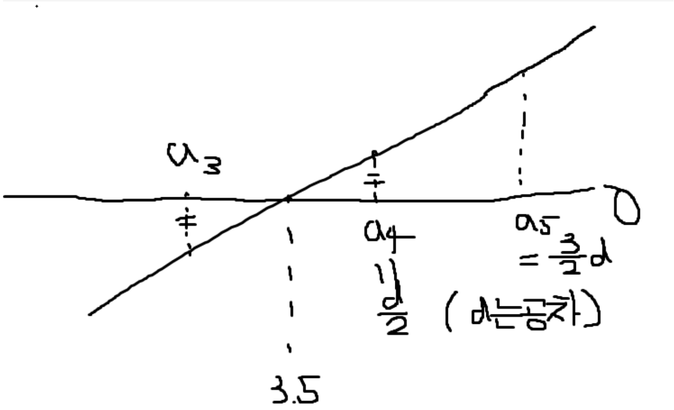
$$\sum (a_n + |a_n|)$$

를 줬다면 양수인 항들만 골라서 그 합의 두 배만큼이 저 값이겠다.

\+ 여기서 수열 a_n이 등차수열이라면, 음수인 부분 합과 양수인 합을 알았고, 다른 조건을 통해 양수 음수 경계가 되는 항이 어딘지 알 수 있다면 <u>(합이) 양수 부분 음수 부분 각각 등차 중항으로 합을 계산하여 공차도 구할 수 있겠지?</u>

- 등차수열의 합이 (등차중항)*(항 개수)라는 것을 잊어버리면 안 된다.

특정 구간 등차수열의 합이 0이라면 그 구간 등차중항은 0이다. $\sum_{k=1}^{7} a_n = 0$ 이라면 $a_{3.5}$=0이라는 결론을 도출할 수 있어야 한다. 물론 $a_{3.5}$라는 것은 실제로 존재하지 않지만, 적어도 a_3과 a_4의 관계는 절댓값이 같지만 부호만 다른 항이라는 것 정도는 알아채야 한다.



마찬가지로 합이 양수라면 등차중항이 양수임을 준 것이고, 합이 음수라면 등차중항이 음수임을 준 것이다.

- 조건이 비는 것 같다면....

정수나 자연수 조건이 있는지 확인해야 한다. 등차수열이라면 공차를, 등비수열이라면 공비를 확인하여 조건을 만족하는 것만 찾으면 된다. (181129 나형, 220913)

추가로, 정수나 자연수 조건이 있다면 부정방정식 형태로 공비/공차나 n째항의 n 등이 정해질텐데, 이건 한 문자로 정리하기보다 그냥 조건을 만족하는 자연수/정수를 대입해봐서 소거하는 게 합리적이다.

- 귀납적으로 정의된 함수

참 귀찮다. 그냥 몇 개 써가면서 규칙을 찾아가는 게 중요한 철칙 중 하나.

19. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n} = a_n - 1$ (나) $a_{2n+1} = 2a_n + 1$

$a_{20} = 1$일 때, $\sum_{n=1}^{63} a_n$의 값은?19)

① 704 ② 712 ③ 720
④ 728 ⑤ 736

201121(나)처럼 대놓고 합을 묻고 있고, 다음 짝수항과 홀수항이 전 항으로 정의된 경우처럼 '합을 초기 하나 항으로 전부 표현할 수 있는 경우'와 같이 특별한 경우에는 (가)식과 (나)식을 더해야 한다는 것은 기본으로 알아 두자.

(210430 가형도 풀어보자. 낚시가 하나 더 있다.)

- 귀납적으로 정의된 수열은 두 항 건너, 세 항 건너, 네 항 건너 규칙이 있는 경우가 많다.

나열하다 보면 어렵지 않게 파악할 것이다.

- 역추적

앞으로 계속 가는 정추적은 단순히 n이 더 큰 항을 찾을 때, 또는 이 수열의 반복되는 규칙을 찾을 때 등등 사용하게 된다.

반면에 역추적은 n이 더 작은 항을 찾을 때 보통 하게 되는데,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 3\ (a_n > 0)$$

$$a_{n+1} = a_n + 7\ (a_n \le 0)$$

이런 수열이 있다고 했을 때, 역추적을 한다면 a_n에 대한 식으로 바꿔주어,

$$a_n = 2(a_{n+1} + 3)\ (a_{n+1} > -3)$$

$$a_n = a_{n+1} - 7\ (a_{n+1} \le 7)$$

처럼 바꾸고서 조건에 맞는 것들을 선택하여 뒤로 가면 되겠다.

- 다시, 귀납적으로 정의된 수열도 함수다?

귀납적으로 정의된 수열도 함수로 볼 여지가 있다. 그런데 위에서 말한 것과는 결이 살짝 다르게, 정의역이 n항, 치역이 n+1항이 되는 함수로 보는 관점이다. 귀납적으로 정의된 수열은 참 다양하다. 피보나치 수열처럼 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$이렇게 한 항이 다른 두 항으로 표현되는 수열도 있는 반면, 특별하게 위의 경우처럼

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} - 3\ (a_n > 0)$$

$$a_{n+1} = a_n + 7\ (a_n \le 0)$$

a_{n+1}이 a_n만으로 이루어진 항인 경우도 많이 주어진다. 이 경우, n+1항을 y로, n항을 x로 받아들여 그래프를 그릴 수 있다.

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

이 문제를 보면 '구간 별로 정의된 함수'와 상당히 유사하다.

나는 작년 9월 현장 시험에서 그래프를 그려서 풀었다. 그래프를 그리면 근도 근이지만, 양수 항만이 다음 양수 항을 낳고 음수 항만이 다음 음수 항을 낳는다는 사실 등이 좀 더 직관적으로 잘 들어온다.

- 등비수열

등비수열은 고난이도로 자주 나오는 테마는 아니다. 다만 등비수열의 합에서도 공비를 찾을 수 있음을 염두에 두고 있자.

$$ex)\ \frac{S_{2n}}{S_n} = r^n + 1(r\text{은 공비})$$

- 하고 싶은 말

수열 파트는 많은 문제를 접하고 정리하는 게 큰 도움이 된다. 개념을 넘어서 논리적인 사고와 직관으로 지름길을 찾는 것이 푸는 데에 도움이 되는 경우가 많기 때문이다. 사설 문제 중 좋은 수열 문제 많다. 다른 파트도 마찬가지지만 수열은 더더욱 다양하게 접하고 많이 깨져보는 편이 바람직하다.

[2021학년도 수능 예시문항 20번]

7. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0, \quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하여라.7)

[2020학년도 수능(나형) 15번]

18. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?18)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[2019학년도 수능(나형) 29번]

33. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하여라.33)

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k>-100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n}=b_n+2$
> (나) $a_{2n+1}=b_n-1$
> (다) $b_{2n}=3a_n-2$
> (라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n=155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오. [4점]

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1|\le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1\le a_n<-\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2}<a_n\le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[2021학년도 수능 예시문항 20번]

7. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

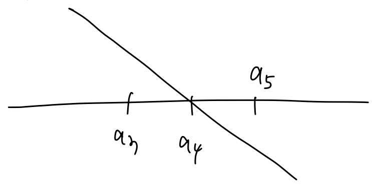
$$a_3+a_5=0,\quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하여라.[7]

$a_4=0$

양수합이 15.

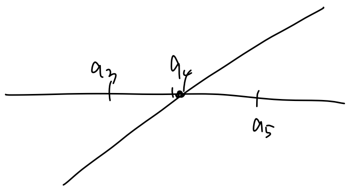
①



$a_1+a_2+a_3$ 이 양수합 $= -6d = 15.$

$d=-\frac{5}{2}$ (X)

②



a_5+a_6이 양수합 $= 3d = 15$

$\therefore d = 5$

$a_9 = 5d = \boxed{25}.$

* 두 케이스 중 '정수' 조건으로 아래를 골라야 함.

+ 사실 a_9가 양수로 (자연수) 나와야 OMR 마킹이 가능해서 아래 케이스이기도 한데 $(a_9>0)$....

니라면 $|a_9|$를 구하라고 줬을 듯.

[2020학년도 수능(나형) 15번]

18. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?[18]

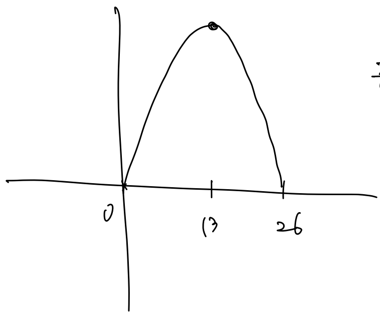
① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

$a_n = -4n+54$

$S_n = -2n^2+52n$

이웃한 가장 큰 S들만 5개

$S_m \sim S_{m+4}$



중앙의 S_{m+2} S_{13} 일 때겠지?

$\boxed{\therefore m=11}$

[2019학년도 수능(나형) 29번]

33. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하여라.[33]

> (가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

(나) − (가) → $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$

∴ 음수항이 −20

(다) − (나) → $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n)=14$

∴ 음수항이 −7

(조건이 모자라 보인다면....)

b의 음수항은 b_2, b_4. $b_1=b$라 하면

$b(r+r^3)=-20$, b는 자연수.

가능한 음의 정수 r은 −2랑 −1.

$\downarrow$ $b=2$, $\downarrow$ $b=10$

i) $b=10$ $r=-1$.

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{5}a_n+10=27$. $\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

→ a의 양수항 24 음수항 −7

i)-① $a_1+a_2+a_3=24$ $a_4+a_5=-7$ 이라면

$a_2=8$ $a_{4.5}=-\frac{7}{2}$. $2.5d=-\frac{23}{2}$ $d\neq$ 정수

i)-② $a_1+a_2+a_3+a_4=24$ $a_5=-7$ 이라면

$a_{2.5}=6$ $a_5=-7$. $2.5d=-13$. $d\neq$ 정수

ii) $b=2$ $r=-2$

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{5}a_n+22=27$. $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

→ a의 양수항 12 음수항 −7.

ii-① $a_1+a_2+a_3=12$ $a_4+a_5=-7$

$a_2=4$. $a_{4.5}=-\frac{7}{2}$. $2.5d=-\frac{15}{2}$ $\boxed{d=-3}$

($a_1+a_2+a_3+a_4=12$. $a_5=-7$은 당연히 안됩니다. 생략.)

∴ $a_n=-3n+10$

$b_n=(-2)^{n-1}$ $\boxed{117}$

$b_7=128$ $a_7=-11$

13. 첫째항이 −45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k>-100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$a_1=-45$.

(가) → $a_m=-a_{m+3}$. (상식적으로 $a_m\neq a_{m+3}$이니....)

→ $a_{m+1.5}=0$

→ $-45+(m+0.5)d=0$

$\boxed{\therefore (2m+1)d=90}$

(나). $\sum_{k=1}^{n}a_k$가 가장 작은 경우 (음수항만 다 더한, 즉 $\sum_{k=1}^{m+1}a_k$의 경우에도 −100 보단 크다.)

$a_1=-45$. $a_{m+1}=-0.5d$ ($\because a_{m+1.5}=0$)

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\frac{(-45-0.5d)\cdot(m+1)}{2}>-100$

$\boxed{(90+d)(m+1)<400}$.

→ 두 개의 방정식/부등식 풀면됨.

m, d가 자연수라는 점수 조건이 모자라보이는 걸 메꿈.

일단 $(90+d)(m+1)<400$에서

m이 4이상인 건 다 안되는거겠지?

$m=1$, $d=30$ 과

$m=2$, $d=18$ 인 것만 통과.

$\boxed{\therefore 48}$

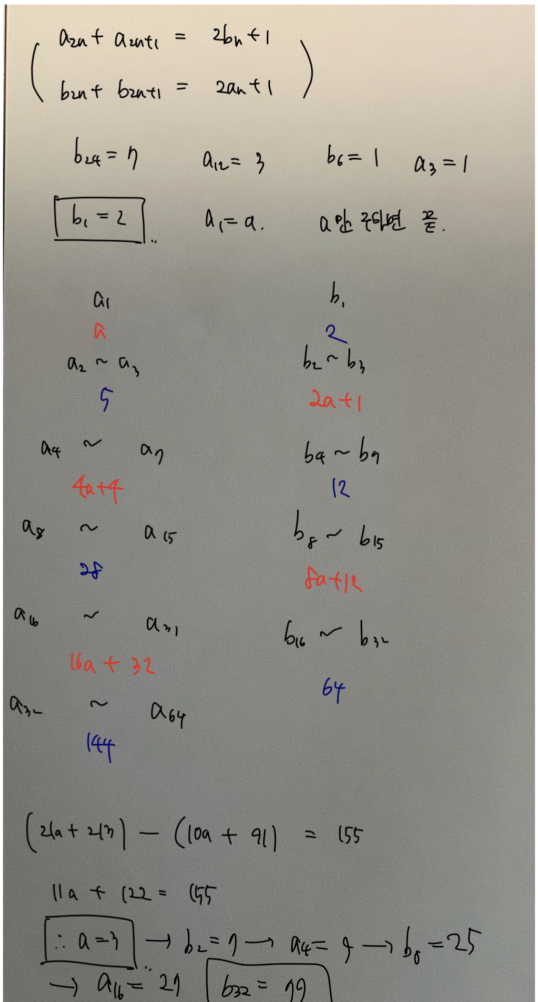
30. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{2n}=b_n+2$
> (나) $a_{2n+1}=b_n-1$
> (다) $b_{2n}=3a_n-2$
> (라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63} a_n - \sum_{n=1}^{31} b_n = 155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오. [4점]

〈 2011 21 (나)를 풀지 않았다면 풀고 오세요 〉

(풀어놓은 게 있어 사진으로 대체)



* 조심할 점은 $a_1 \to b_2+b_3$ 은

$a \to 2a+1$ 이지만

$b_2+b_3 \to a_4 \sim a_7$은

$(2a+1) \to 2(2a+1)+1$ 이아니라

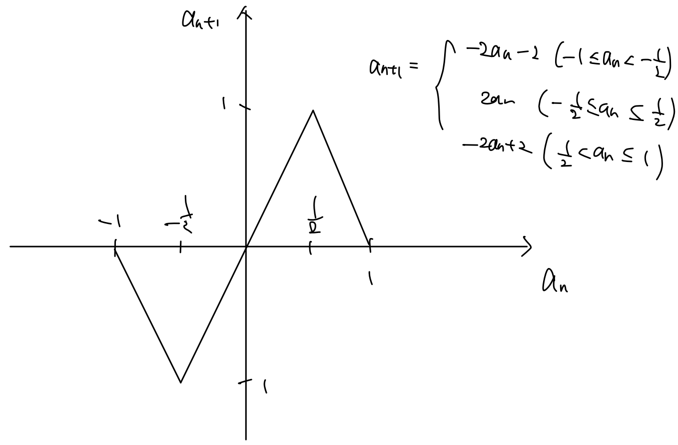
$2(2a+1)$ +2 라는 점.

15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$



a_5가 양수라면 $a_6>0$ a_5가 음수라면 $a_6<0$.

a_5+a_6 이려면 $a_5=a_6=0$.

또, 0을 놓는 건 $-1, 0, 1$ (이전 항이 $-1, 0, 1$)

근데 이전 항이 -1이면 그 항의 모든 이전 항들은 음수.

∴ $a_1 \sim a_4$는 0이거나 양수거나.

모두.

① $a_4=1 \to a_3=\frac{1}{2} \to a_2=\frac{1}{4}, \frac{7}{4}$

$\to a_1=\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

② $a_4=0. \to a_3=1 \to$ (이전과 같은 프로세스, ①에서의 a_2가 a_1).

$a_1=\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$

③ $a_4=0$, $a_3=0 \to$ $a_1=\frac{1}{2}$

④ $a_4=0$. $a_3=0$. $a_2=0 \to$ $a_1=1$

$\therefore \frac{9}{2}$