제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 8일차

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

좌우미분계수 (미적선택자용)

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형 (홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

좌우미분계수 (미적선택자용)

제 2 교시 수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.

1. $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\frac{kx}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2k}x\right)\right| \quad (\text{단, } k\text{는 양의 상수})$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$($n$은 자연수)라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. $k+m$의 값은? (우주설 자작. 제한시간 6분)

(가) $\alpha_2=6$

(나) 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\left(\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_n+h^n)-f(\alpha_n)}{h^n}\right)=16$

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

2. $0<t<\frac{\pi}{2}$인 상수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & (x\le t) \\ e^x(\sin x-\cos x)+a & (x>t) \end{cases}$$

이다. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=b$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?
(우주설 자작. 제한시간 9분)

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

3. $x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\sin(\pi\sqrt{x})\right|$$

에 대하여 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로
나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$($n$은 자연수)라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+h^n)-f(\alpha_n-h^n)}{h^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [4점] (우주설 자작. 제한시간 10분)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{12}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

제시하는 사고과정

$x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\frac{kx}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2k}x\right)\right| \quad (\text{단, } k\text{는 양의 상수})$$

에 대하여 <u>함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한</u>, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (n은 자연수)라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. $k+m$의 값은?

(우주설 자작. 제한시간 6분)

(가) $\alpha_2=6$

(나) 자연수 m에 대하여 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\left(\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_n+h^n)-f(\alpha_n)}{h^n}\right)=16$

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

$f(x)=0$을 만족시키는 $x=k, 3k, 5k, \cdots$ 가 의심 점

절댓값을 무시하고 함수 $y=\frac{kx}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2k}x\right)$에 대하여

이를 미분하면, $y'=\frac{k}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2k}x\right)-\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2k}x\right)$

여기에 의심 점 $x=k, 3k, 5k, \cdots$ 를 대입하면

각각, $y'=-\frac{k}{2}, \frac{3}{2}k, -\frac{5}{2}k, \cdots$ 등으로, 0이 아니므로

$x=k, 3k, 5k, \cdots$ 가 $x=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ 이다.

(가)에 의해 $k=2$이다.

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_n+h^n)-f(\alpha_n)}{h^n}$은 $y=f(x)$의 그래프를 대략적으로 그리고 $(\alpha_n, f(\alpha_n))$을 표시한 뒤 $\displaystyle\lim_{h\to 0-}$에 유의하여 관찰하면 n이 홀수이면 $x=\alpha_n$에서의 좌 미분계수 n이 짝수이면 $x=\alpha_n$에서의 우 미분계수임을 알 수 있다.

$x=k, 3k, 5k, \cdots$ 에서 $y'=-\frac{k}{2}, \frac{3}{2}k, -\frac{5}{2}k, \cdots$ 이므로

미분계수의 크기가 1, 3, 5, 7, ⋯ 의 규칙성을 갖는 것을 알 수 있습니다. 절댓값함수는 미분 불가능 지점에서 좌 우미분계수의 크기는 같고 부호만 각각 음수, 양수이므로

$$\sum_{n=1}^{m}\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_n+h^n)-f(\alpha_n)}{h^n}=-1+3-5+7-\cdots$$

$$=2+2+\cdots=16$$

이므로 $m=16$임을 알 수 있다.

따라서 답은 3번

제시하는 사고과정

$0<t<\frac{\pi}{2}$인 상수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & (x\le t) \\ e^x(\sin x-\cos x)+a & (x>t)\end{cases}$$

이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=b$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

(우주설 자작. 제한시간 9분)

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10

$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=b$는 **극한값의 존재조건에 의해**

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=b$

를 의미한다.

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+2h)-f(t-4h)}{h}$에서

극한값이 존재하기 위해서는 (분모)→0 일 때, (분자)→0이므로

$\lim_{h\to 0+}f(t+2h)-f(t-4h)=0$,

$x=t$에서 $f(x)$는 좌 극한값과 우 극한값이 같다.

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{f(t)-f(t-4h)}{h}$에서

극한값이 존재하기 위해서는 (분모)→0 일 때, (분자)→0이므로

$\lim_{h\to 0-}f(t)-f(t-4h)=0$,

$x=t$에서 $f(x)$는 함숫값과 우 극한값이 같다.

따라서 $x=t$에서 $f(x)$는 연속이다. 한편, 극한값을 계산하면

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+2h)-f(t-4h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+2h)-f(t)}{h}+\frac{f(t)-f(t-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}2\times\frac{f(t+2h)-f(t)}{2h}+4\times\frac{f(t)-f(t-4h)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}2f'(t+h)+4f'(t-h)$$ (2×우 미분계수 + 4×좌 미분계수)

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(t)-f(t-4h)}{h}=\lim_{h\to 0-}4\times\frac{f(t)-f(t-4h)}{4h}$$
$$=\lim_{h\to 0+}4f'(t+h)$$ (4×우 미분계수)

'2×우 미분계수+4×좌 미분계수 = 4×우 미분계수' 를 해석

$f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & (x\le t) \\ e^x(\sin x-\cos x)+a & (x>t)\end{cases}$에서 $f'(x)=\begin{cases} e^x(2\cos x) & (x<t) \\ e^x(2\sin x) & (x>t)\end{cases}$

이므로

$2\times e^t(2\sin t)+4\times e^t(2\cos t)=4\times e^t(2\sin t)$,

$2\cos t=\sin t$, $\cos t=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin t=\frac{2}{\sqrt{5}}$를 얻는다.

이것을 대입하면, $b=e^t\times\frac{16}{\sqrt{5}}$를 얻고

$x=t$에서 연속성을 판단하면

$e^t(\sin t+\cos t)=e^t(\sin t-\cos t)+a$에 의해, $a=e^t\times\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{b}{a}=8$을 얻는다.

제시하는 사고과정

$x>0$에서 정의된 함수

$f(x)=\left|\sin(\pi\sqrt{x})\right|$

에 대하여 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$($n$은 자연수)라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

$$a_n=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+h^n)-f(\alpha_n-h^n)}{h^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [4점] (우주설 자작. 제한시간 10분)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{12}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

$x=n^2$에서 $f(x)=0$이고, $f'(x)\neq 0$이므로 $\alpha_n=n^2$이다. 이때,

$y=\sin(\pi\sqrt{x})$ 에서 $y'=\cos(\pi\sqrt{x})\times\frac{\pi}{2\sqrt{x}}$, $x=\alpha_n$을 대입하면

$\cos(n\pi)\times\frac{\pi}{2n}$이므로 $f(x)=\left|\sin(\pi\sqrt{x})\right|$ 에서 $x=\alpha_n$에서 좌/우

미분계수의 크기는 $\left|\cos(n\pi)\times\frac{\pi}{2n}\right|=\frac{\pi}{2n}$이다.

따라서 $\lim_{h\to 0+}f'(\alpha_n+h)=\frac{\pi}{2n}$, $\lim_{h\to 0+}f'(\alpha_n-h)=-\frac{\pi}{2n}$을 얻는다.

한편 $a_n=\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+h^n)-f(\alpha_n-h^n)}{h^n}$의 해석은

n의 값이 짝수인지 홀수인지에 따라 달라질 것을 알 수 있다.

ⅰ) n이 홀수 인 경우

$h^n=H$라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\lim_{H\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+H)-f(\alpha_n-H)}{H}\\&=\lim_{H\to 0-}\frac{f(\alpha_{n+2}+H)-f(\alpha_{n+2})}{H}+\frac{f(\alpha_n)-f(\alpha_n-H)}{H}\\&=\lim_{h\to 0+}f'(\alpha_{n+2}-h)+f'(\alpha_n+h)\\&=-\frac{\pi}{2(n+2)}+\frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

ⅱ) n이 짝수 인 경우

$h^n=H$라 하면

$$\begin{aligned}a_n&=\lim_{H\to 0+}\frac{f(\alpha_{n+2}+H)-f(\alpha_n-H)}{H}\\&=\lim_{H\to 0+}\frac{f(\alpha_{n+2}+H)-f(\alpha_{n+2})}{H}+\frac{f(\alpha_n)-f(\alpha_n-H)}{H}\\&=\lim_{h\to 0+}f'(\alpha_{n+2}+h)+f'(\alpha_n-h)\\&=\frac{\pi}{2(n+2)}-\frac{\pi}{2n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+a_{2n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{\pi}{2(2n+1)}+\frac{\pi}{2(2n-1)}\right)+\left(\frac{\pi}{2(2n+2)}-\frac{\pi}{2(2n)}\right)\right\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{\pi}{4n+2}+\frac{\pi}{4n-2}\right)+\left(\frac{\pi}{4n+4}-\frac{\pi}{4n}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n}\right)\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\begin{pmatrix}+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\\+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\\cdots\end{pmatrix}=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

답은 2번

9일차 예습과제

9일차는 지금까지의 내용을 복습하는 테스트회차입니다.

예습과제는 없고, 1~8일차까지의 내용을 복습합시다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.