[준킬러][수학1] 2지수로그함수1

프로젝트 2023.01.06

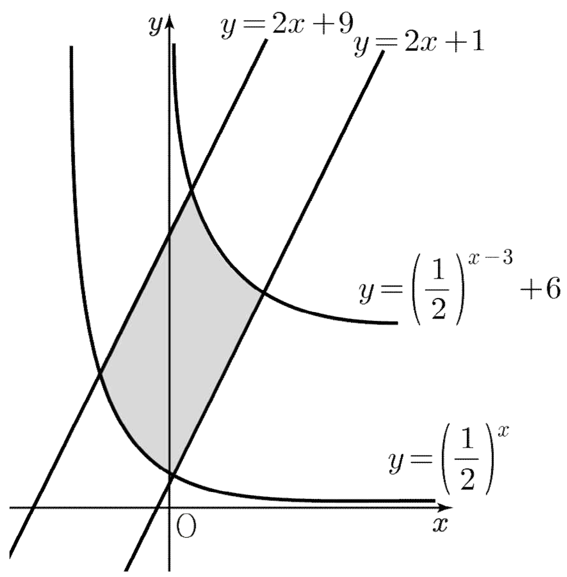
03 수1 03 지수함수

01 지수함수의 그래프

04 지수함수의 그래프4 (평행이동과 넓이)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 27

1. 그림과 같이 두 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$과 두 직선 $y=2x+1$, $y=2x+9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



03 수1 03 지수함수

01 지수함수의 그래프

05 지수함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

2. 두 지수함수

$$f(x)=9^x+a,\ g(x)=b\cdot 3^x+2$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x좌표가 $x=\log_3 2$, $x=\log_3 k$ (단, $k>2$)일 때, <보기>에서 a, b에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. $b^2=4a-8$

ㄴ. $a=2b-2$

ㄷ. $a>6$

① ㄴ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 9

3. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고, $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 10

4. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-2\le x\le 0$일 때, $f(x)=|x+1|-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(-x)=0$
(다) 모든 실수 x에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$

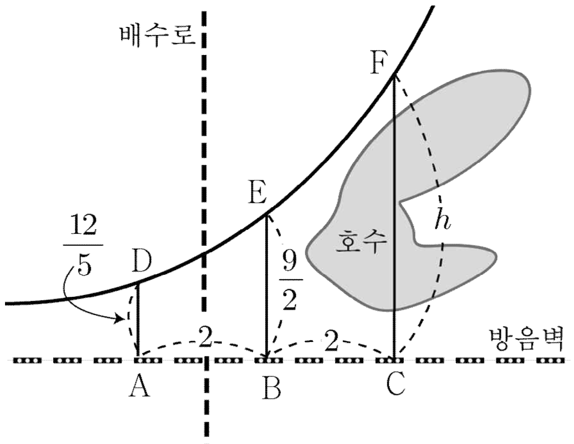
$-10\le x\le 10$에서 $y=f(x)$의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프의 교점의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 16

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 04월 16

5. 다음은 어느 지역의 방음벽, 배수로, 도로를 나타낸 평면도이다. 평면도에서 방음벽을 x축, 방음벽과 수직으로 건설된 배수로를 y축으로 할 때, 도로의 중앙선은 곡선 $y=a^x+2(a>1)$의 일부로 나타내어진다. $\overline{AB}=\overline{BC}=2$를 만족시키는 x축 위의 세 점 A, B, C를 지나고 x축에 수직인 세 직선을 그어 곡선 $y=a^x+2$와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD}=\frac{12}{5}$, $\overline{BE}=\frac{9}{2}$, $\overline{CF}=h$일 때, 상수 h의 값은?
(단, 방음벽, 배수로, 도로의 중앙선의 폭은 무시한다.)

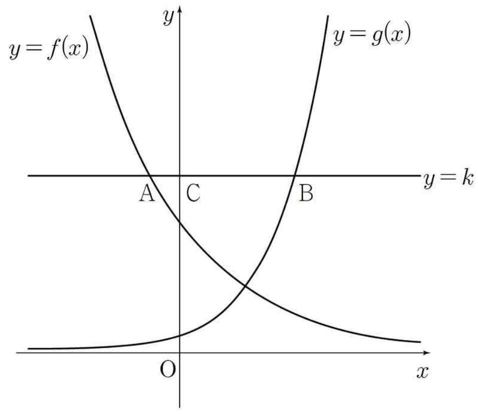


① $\frac{121}{8}$ ② $\frac{125}{8}$ ③ $\frac{137}{8}$

④ $\frac{141}{8}$ ⑤ $\frac{155}{8}$

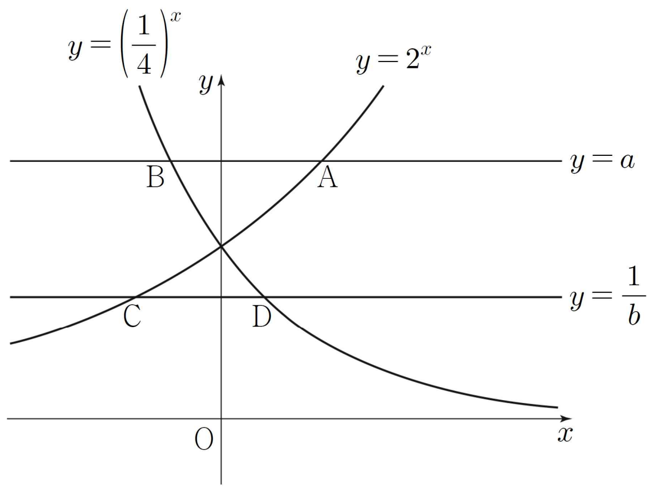
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 27

6. 그림과같이 두 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, $g(x)=4^{x-1}$의 그래프와 직선 $y=k(k>2)$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 C(0, k)에 대하여 $\overline{AC}$: $\overline{CB}=1$: 5일 때, k^3의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 20

7. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y=a$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=\frac{1}{b}$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a=b$이면 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.
ㄴ. 직선 AC의 기울기를 m_1, 직선 BD의 기울기를 m_2라 하면 $2m_1+m_2=0$이다.
ㄷ. 직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이고 직선 AD의 기울기가 $2\sqrt{2}$이면 사각형 ABCD는 마름모이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1

03 지수함수

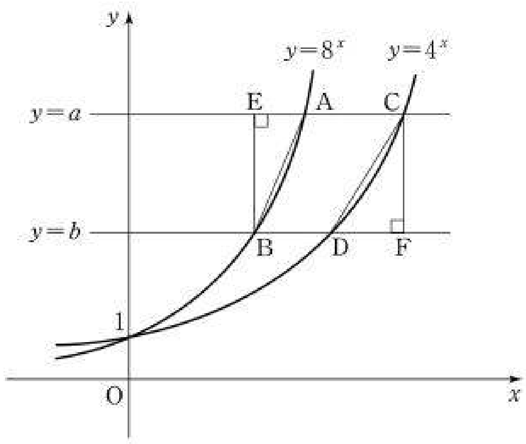
01 지수함수의 그래프

06 지수함수의 그래프의 해석2 (길이와 넓이)

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 13

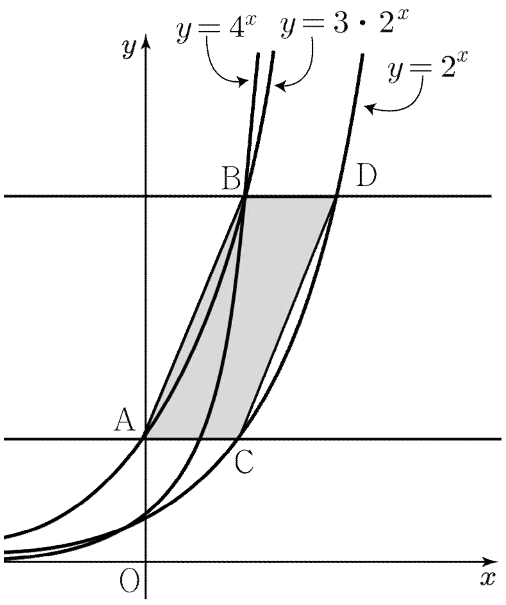
8. 그림과 같이 함수 $y=8^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=4^x$의 그래프가 두 직선 $y=a$, $y=b$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발을 F라 하자. 삼각형 AEB의 넓이가 20일 때, 삼각형 CDF의 넓이는?
(단, $a>b>1$이다.)



① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 20

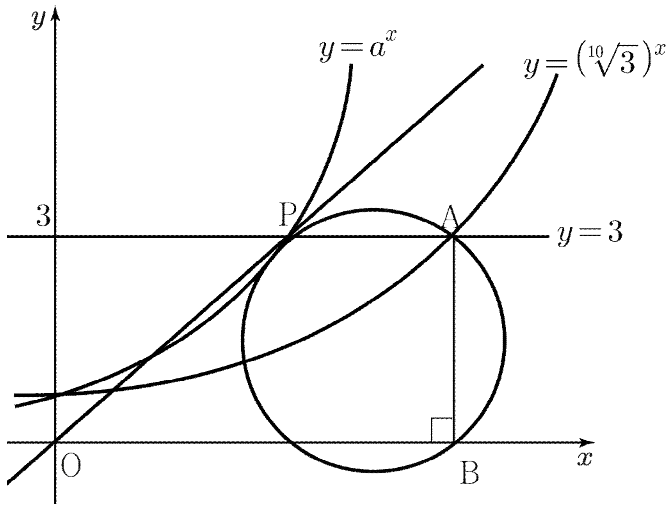
9. 그림과 같이 함수 $y=3\cdot 2^x$ 의 그래프가 y축과 만나는 점을 A, 함수 $y=4^x$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축에 평행하게 그은 직선이 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?



① $3\log_2 3$ ② $4\log_2 3$ ③ $5\log_2 3$
④ $6\log_2 3$ ⑤ $7\log_2 3$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 09월 21

10. 그림과 같이 지수함수 $y=(\sqrt[10]{3})^x$ 의 그래프가 직선 $y=3$과 만나는 점을 A라 하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하자. 두 점 A, B를 지나는 원이 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프와 직선 $y=3$의 교점 P에서 직선 OP와 접하도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?
(단, $a>\sqrt[10]{3}$)



① $3^{\frac{8}{9}}$ ② $3^{\frac{10}{9}}$ ③ $3^{\frac{13}{9}}$
④ $3^{\frac{16}{9}}$ ⑤ $3^{\frac{20}{9}}$

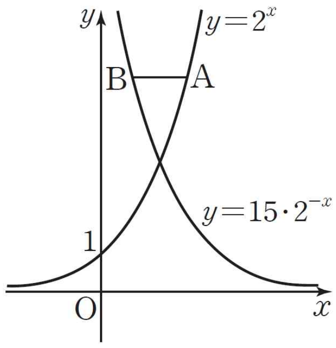
[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 17

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 06월 20

[출처] 2020 일반_기타개인 구분

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

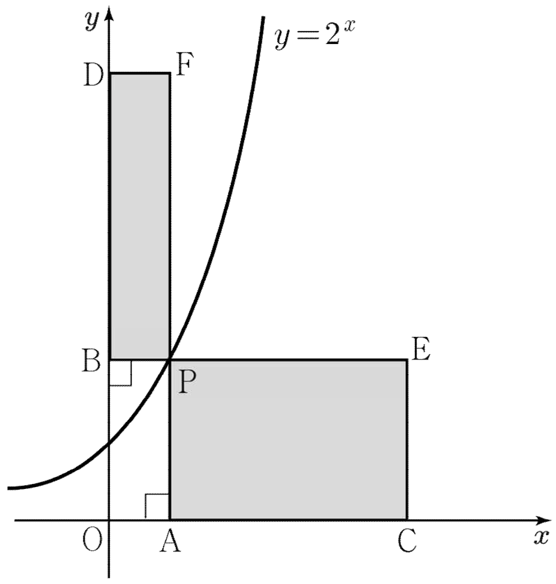
11. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15\cdot2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x 좌표를 a 라 할 때, $1<\overline{\mathrm{AB}}<100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는?



① 40 ② 43 ③ 46
④ 49 ⑤ 52

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 18

12. 곡선 $y=2^x$ 위의 한 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 그림과 같이 x축 위의 점 C와 y축 위의 점 D에 대하여 두 사각형 PACE와 PFDB가 각각 직사각형이 되도록 점 E와 점 F를 잡는다.
(단, 세 점 P, E, F는 제 1사분면 위의 점이다.)



두 직사각형 PACE, PFDB가 다음 조건을 만족시킨다.

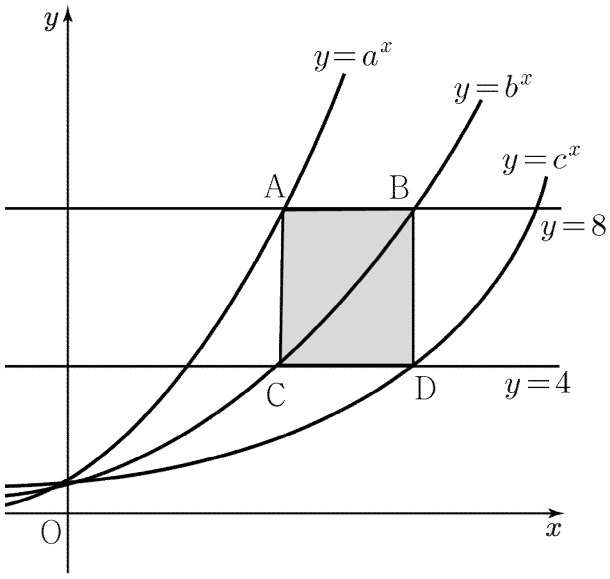
> (가) $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PE}}=1:3$ 이고, $\overline{\mathrm{PF}}=3\sqrt{2}$ 이다.
>
> (나) 직사각형 PACE의 넓이는 직사각형 PFDB의 넓이의 2배이다.

점 E의 x 좌표는?

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6
④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 28

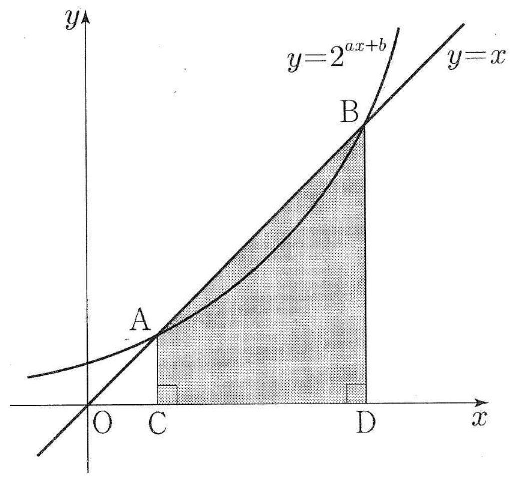
13. 그림과 같이 $a>b>c>1$인 세 상수 a, b, c에 대하여
두 곡선 $y=a^x$, $y=b^x$과 직선 $y=8$이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=b^x$, $y=c^x$과 직선 $y=4$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB가 정사각형일 때, $abc=2^{\frac{q}{p}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 13

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 15

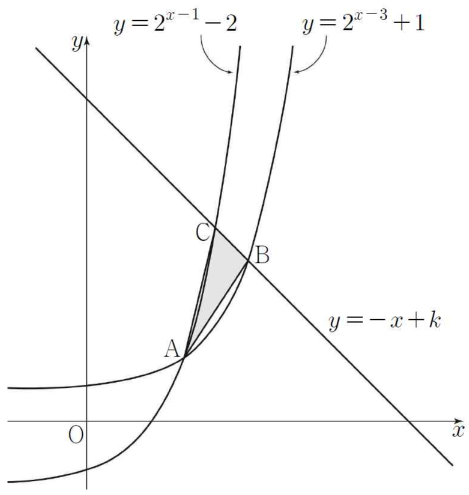
14. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 18

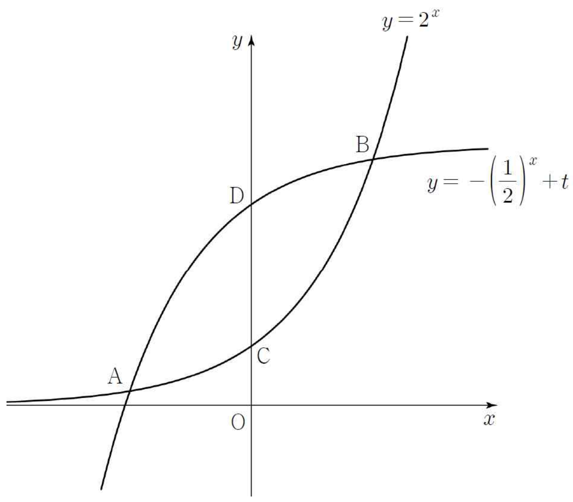
15. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{x-3}+1$과 $y=2^{x-1}-2$가 만나는 점을 A라 하자. 상수 k에 대하여 직선 $y=-x+k$가 두 곡선 $y=2^{x-3}+1$, $y=2^{x-1}-2$와 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 선분 BC의 길이는 $\sqrt{2}$이다. 삼각형 ABC의 넓이는?
(단, 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.)



① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 18

16. 그림과 같이 2보다 큰 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$가 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, O는 원점이다.)



<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{CD}}=t-2$

ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{DB}}$

ㄷ. 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 9

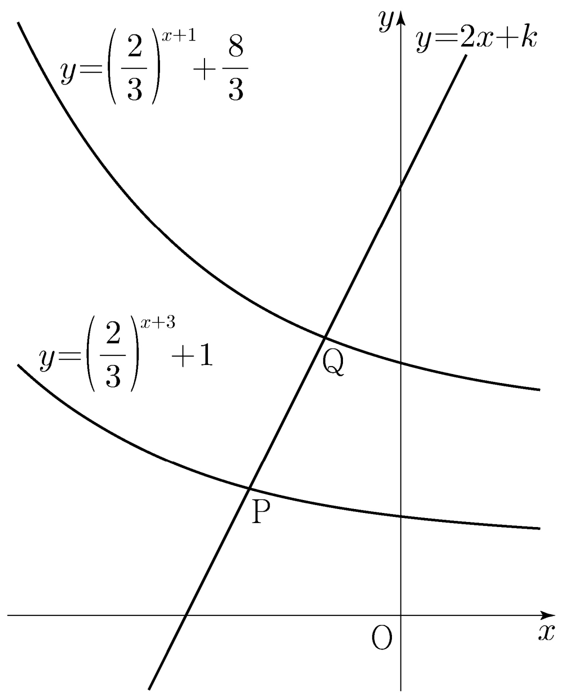
17. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\ y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은?

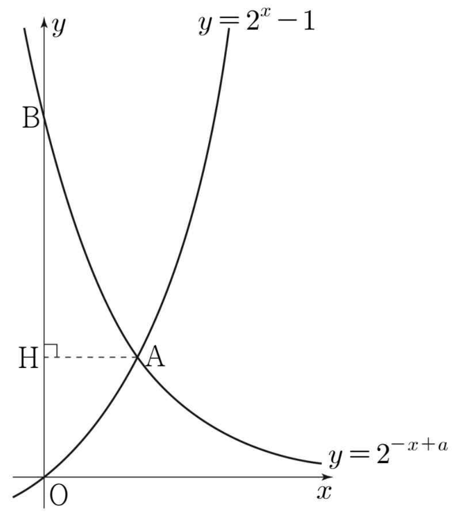
① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 9

18. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^{-x+a}$, $y=2^{x}-1$이 만나는 점을 A, 곡선 $y=2^{-x+a}$이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OB}}=3\times\overline{\mathrm{OH}}$이다. 상수 a의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 2 ② $\log_2 5$ ③ $\log_2 6$

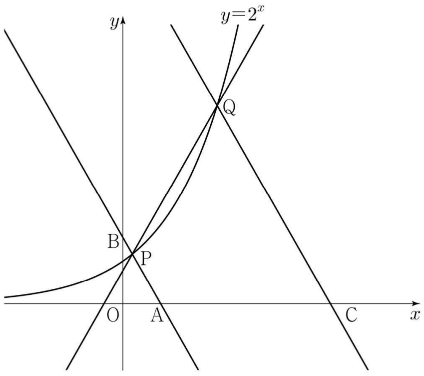
④ $\log_2 7$ ⑤ 3

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 21

19. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$)

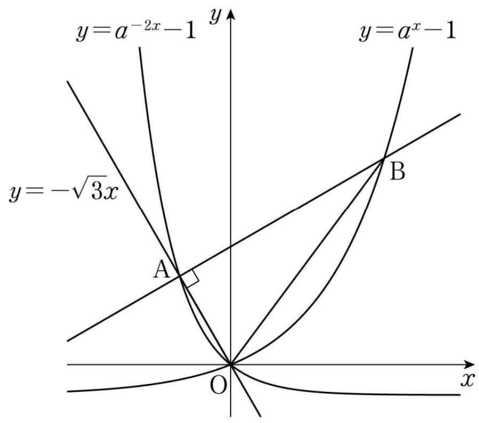


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 21

20. 그림과 같이 $a>1$인 실수 a에 대하여 두 곡선

$$y=a^{-2x}-1,\ y=a^x-1$$

이 있다. 곡선 $y=a^{-2x}-1$과 직선 $y=-\sqrt{3}x$가 서로 다른 두 점 O, A에서 만난다. 점 A를 지나고 직선 OA에 수직인 직선이 곡선 $y=a^x-1$과 제 1사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.)



03 수1

03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

03 Mm3 (치환)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 21

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 21

21. 두 함수

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1,\ g(x) = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$$

이 있다. $-1 \leq x \leq 2$에서 두 함수 $f(g(x))$, $g(f(x))$의 최댓값이 같아지도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ③ $\sqrt{2}$

④ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

22. $a>1$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^{2x}+4a^x-2$가 구간 $[-1,\ 1]$에서 최댓값 10을 갖는다. 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 1

03 수1

03 지수함수

02 지수함수의 최대와 최소

04 Mm4 (여러가지 Mm)

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고2 10월 29

23. 지수함수 $y=4^{x}+4^{-x}-2(2^{x}+2^{-x})+5$의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 11월 8

24. 함수 $f(x)=(2^{x-2}+2^{-x})^{2}-(2^{x}+2^{2-x})+8$ 의 최솟값은?

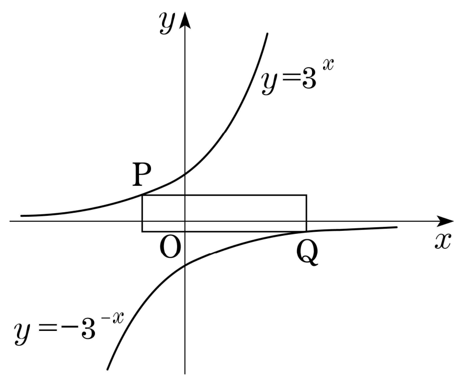
① -8 ② -4 ③ 0

④ 4 ⑤ 8

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 15

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 10월 15

25. 함수 $y=3^{x}$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ 3^{\alpha})$ 과 함수 $y=-3^{-x}$ 의 그래프 위의 점 $\mathrm{Q}(\beta,\ -3^{-\beta})$ 에 대하여 $\beta-\alpha=4$ 가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은?



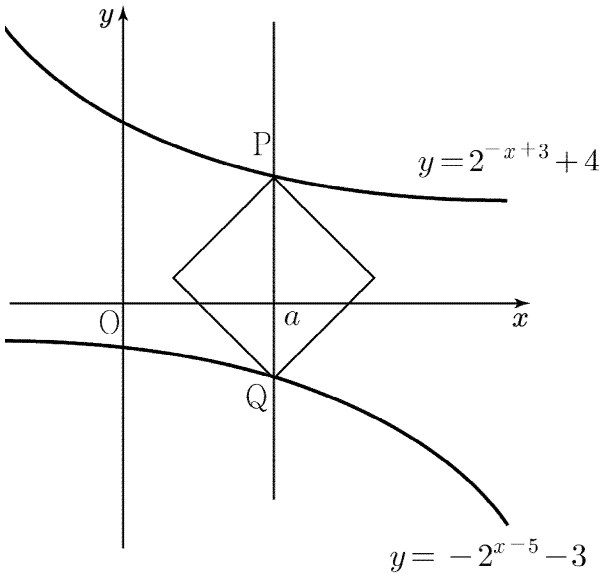
① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 09월 19

26. 직선 $x=a$와 두 곡선 $y=2^{-x+3}+4$,

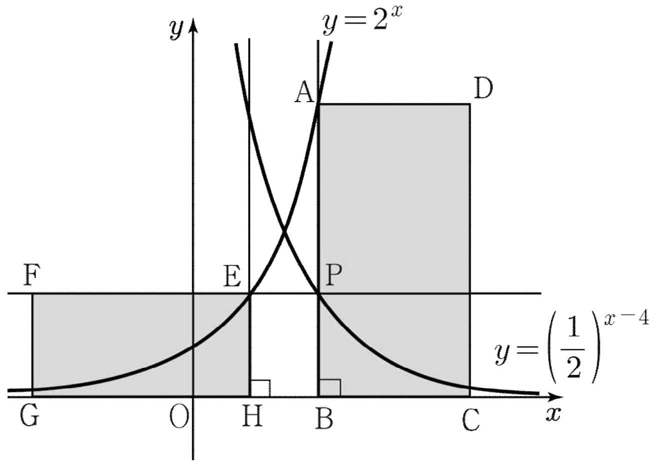
$y=-2^{x-5}-3$의 교점을 각각 P, Q라 할 때, 선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 넓이의 최솟값은?



① 32 ② 36 ③ 40
④ 44 ⑤ 48

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 29

27. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$의 제 1사분면 위의 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 AB와 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$의 교점을 P라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 E, 점 E에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. x축 위의 두 점 C와 G를 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$, $\overline{EH}:\overline{HG}=1:2$가 되도록 잡아 직사각형 ABCD와 직사각형 EFGH를 각각 그린다. 이때 직사각형 ABCD의 넓이와 직사각형 EFGH의 넓이의 합의 최솟값을 구하시오.



03 수1 03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

03 지수방정식3 (연립방정식)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 27

28. 등식 $2^{x+y}+2^x+2^y=1160$ 을 만족시키는 자연수 x, y 의 값을 각각 α, $\beta(\alpha \geq \beta)$ 라 할 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 28

29. $x>1$, $y>1$ 일 때, 연립방정식 $\begin{cases} x^2=y^3 \\ x^y=y^x \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$ 라 할 때, $16(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하시오.

03 수1 03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

04 지수방정식4 (근과 계수의 관계)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 09월 17

30. 지수방정식 $3^{2x}-k\cdot3^{x+1}+3k+15=0$ 의 두 실근의 비가 $1:2$ 일 때, 실수 k 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8

④ 10 ⑤ 12

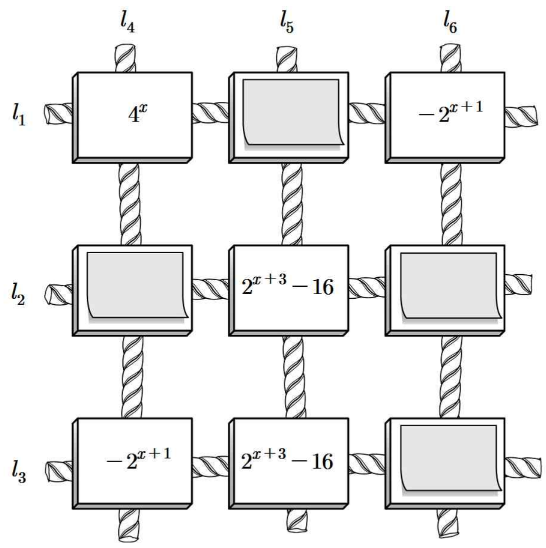
03 수1 03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

05 지수방정식5 (해석)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 18

31. 그림과같이 가로줄 l_1, l_2, l_3과 세로줄 l_4, l_5, l_6이 만나는 곳에 있는 9개의 메모판에 모두 x에 대한 식이 하나씩 적혀 있고, 그중 4개의 메모판은 접착 메모지로 가려져 있다. $x=a$일 때, 각 줄 l_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$에 있는 3개의 메모판에 적혀 있는 모든 식의 값의 합을 S_k라 하자. S_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$의 값이 모두 같게 되는 모든 실수 a의 값의 합은?



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

03 수1 03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

06 지수부등식1 (기본)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 19

32. 부등식 $(\sqrt{2}-1)^m \ge (3-2\sqrt{2})^{5-n}$을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는?

① 17 ② 18 ③ 19
④ 20 ⑤ 21

03 수1

03 지수함수

03 지수방정식과 부등식

09 지수부등식4 (해의 조건)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 09월 21

33. 두 집합

$$A=\left\{x \,\middle|\, \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\right\},\ B=\{x\,|\,2^{|x-2|}\le 2^a\}$$

에 대하여 $A\cap B=A$가 성립하도록 하는 실수 a의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 06월 28

34. 두 집합

$$A=\{x\,|\,x^2-(a+b)x+ab<0\}$$
$$B=\{x\,|\,2^{2x+2}-9\cdot 2^x+2<0\}$$

에 대하여 $A\subset B$일 때, $b-a$의 최댓값을 구하시오. (단, $a<b$이다.)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 06월 27

35. 두 집합 $A=\{x\,|\,x<3\}$와

$$B=\{x\,|\,2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a<0\}$$

에 대하여 $A=B$가 되도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 26

36. x에 대한 부등식 $(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1)\le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수가 20일 때, 자연수 p의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 28

37. x에 대한 부등식

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\le 0$$

을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되도록 하는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

03 수1

03 지수함수

04 지수함수의 활용

01 활용1 (부등식과 그래프)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 11

38. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0\le x\le 2$일 때, $f(x)=2^x$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$
>
> (다) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

$-10\le x\le 10$에서 부등식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}-\frac{1}{27}\ge 0$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

02 활용2 (지수방정식의 실근 조건, 치환)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 11월

39. 함수 $f(x)=\dfrac{2^{[x]}+2^{[-x]}}{2}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$

ㄴ. x 가 정수이면 $f(x)\geq 1$ 이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=\dfrac{9}{8}$ 의 해의 개수는 2 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

40. 지수방정식 $9^x-2(a+4)3^x-3a^2+24a=0$의 서로 다른 두 근이 모두 양수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 09월 28

41. 두 지수함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=3\cdot 2^{x+1}-k$ 의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B 에서 만난다. 두 점 A, B 의 x 좌표를 각각 a, b 라 할 때, $ab<0$ 을 만족시키는 모든 자연수 k 의 값의 합을 구하시오.

03 수1 　 03 지수함수

04 지수함수의 활용

03 활용3 (지수방정식의 실근 조건, 그래프로 해석)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

42. $a>1$인 실수 a에 대하여 좌표평면에 두 곡선

$$y=a^x,\ y=|a^{-x-1}-1|$$

이 있다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=|a^{-x-1}-1|$은 점 $(-1,\ 0)$을 지난다.
ㄴ. $a=4$이면 두 곡선의 교점의 개수는 2이다.
ㄷ. $a>4$이면 두 곡선의 모든 교점의 x좌표의 합은 -2보다 크다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 　 03 지수함수

04 지수함수의 활용

04 활용4 (부등식의 성립조건)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 26

43. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k\times 2^x \le 4^x-2^x+4$가 성립하도록 하는 실수 k값의 범위는?

① $k\le -1$ ② $-4\le k\le 3$ ③ $-1\le k\le 3$
④ $k\le 3$ ⑤ $k\ge 0$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 28

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 28

44. 모든 실수 x에 대하여 지수부등식

$$5^{2x} \geq k \cdot 5^{x} - 2k - 5$$

가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $\alpha \leq k \leq \beta$이다. $|\alpha\beta|$의 값을 구하시오.

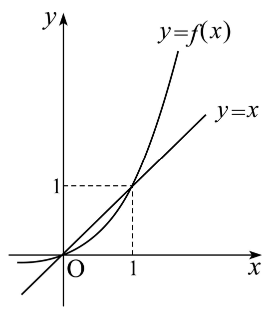
03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

05 활용5 (그래프를 이용한 대소 비교)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 10

45. 그림은 함수 $f(x)=2^{x}-1$의 그래프와 직선 $y=x$이다. 곡선 $y=f(x)$ 위에 임의로 두 점을 잡아 그 두 점의 x좌표를 각각 a, $b(0<a<b)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $0<a<1$이면 $f(a)<a$이다.

ㄴ. $b-a<2^{b}-2^{a}$

ㄷ. $b(2^{a}-1)<a(2^{b}-1)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

46. 함수 $f(x)=|2^x-2|$ 의 그래프 위의 세 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$, $(c,\ f(c))$ 가 $0<a<b<c$ 와 $f(a)>f(b)>f(c)$ 를 만족할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $0<c<1$

ㄴ. $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$

ㄷ. 방정식 $f(x)-a=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

47. 다음 등식을 만족시키는 세 실수 $a,\ b,\ c$ 가 있다.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$$

이때, 세 실수 $a,\ b,\ c$ 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $a<b<c$　② $a<c<b$　③ $b<a<c$

④ $b<c<a$　⑤ $c<a<b$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 18

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 21

48. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 03 지수함수

04 지수함수의 활용

06 활용6 (추론과 해석)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 9

49. k가 자연수일 때 $\log k$의 정수부분 n과 소수부분 α에 대하여 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P_k}$를 $\mathrm{P_k}(\alpha,\ \mathrm{n})$이라 하자. 점 $\mathrm{P_k}$를 곡선 $y=\left(\sqrt{10}\right)^x$ 위에 있도록 하는 모든 k값의 합은?

① 1210 ② 3210 ③ 5410

④ 7510 ⑤ 9410

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

50. 1보다 큰 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{2x},\ g(x)=a^{x+1}-2$$

가 있다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)$를 $h(x)=|f(x)-g(x)|$라 하자. $y=h(x)$의 그래프에 대한 설명으로 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때, $y=h(x)$의 그래프와 x축은 한 점에서 만난다.

ㄴ. $a=4$일 때, $x_1<x_2<\frac{1}{2}$이면 $h(x_1)>h(x_2)$이다.

ㄷ. $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나는 a의 값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 29

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 29

51. k가 자연수일 때, $\log k$의 지표 n과 가수 α에 대하여 좌표평면 위의 점 P_k를 $P_k(n,\alpha)$라 하자.
$10<m<100$인 자연수 m에 대하여 사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$의 넓이의 최댓값을 $\log M$이라 할 때, $10M^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 06월 18

52. 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x-[x]$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{n}x+1\,(n=1,2,3\cdots)$이 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3$의 값은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

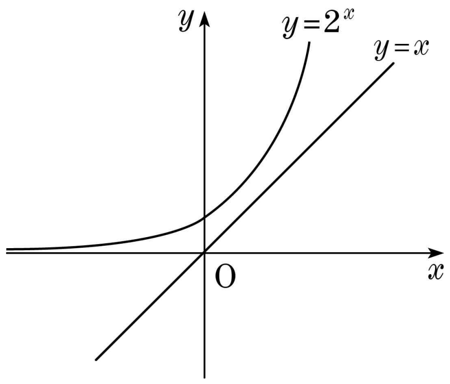
① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 06월 14

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 06월 20

53. 그림은 곡선 $y=2^x$ 과 직선 $y=x$ 이다. 정수 n 에 대하여 중심이 곡선 $y=2^x+n$ 위에 있고 x축, y축에 모두 접하는 원의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. $f(-2)+f(0)+f(2)$ 의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 12

54. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \le x \le 2$ 일 때, $f(x)=2^x$
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$
(다) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

자연수 n 에 대하여 세 점 $(0,\ 2)$, $(2n,\ 4)$, $(-2n,\ 4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 둘레와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. 예를 들어 $a_2=6$ 이다. 이 때, a_9+a_{10} 의 값은?

① 52 ② 56 ③ 60
④ 64 ⑤ 68

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 30

55. 지수함수 $f(x)=a^x$, $g(x)=b^x$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. (단, a, b는 1보다 큰 자연수이다.)

> (가) $f(2)\times g(11)=2^{2015}$
>
> (나) $f(2)< g(4)$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 29

56. $0\le x\le 8$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0\le x\le 1) \\ 2-2^{x-1} & (1< x\le 2) \end{cases}$
>
> (나) $n=1,\ 2,\ 3$일 때,
>
> $2^n f(x)=f(x-2n)\ (2n< x\le 2n+2)$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $32S$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 13

57. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\ge 3) \end{cases}$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은?

① -7 ② -6 ③ -5

④ -4 ⑤ -3

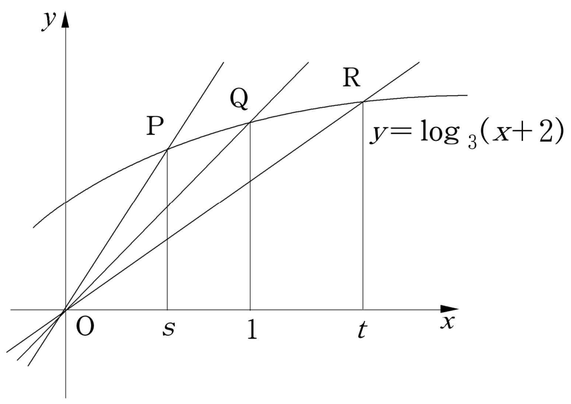
03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

01 로그함수의 그래프1 (기본)

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고2 10월 21

58. 그림과 같이 $y=\log_3(x+2)$의 그래프와 원점을 지나는 세 직선과의 교점을 각각 P, Q, R이라 하자.
세 점 P, Q, R의 x좌표를 각각 s, 1, t라 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, $0<s<1<t$)



① $3^{st}<(s+2)^t<(t+2)^s$
② $3^{st}<(t+2)^s<(s+2)^t$
③ $(s+2)^t<3^{st}<(t+2)^s$
④ $(t+2)^s<3^{st}<(s+2)^t$
⑤ $(t+2)^s<(s+2)^t<3^{st}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 20

59. 함수 $f(x)=\log_3 x$에 대하여 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert f(a)-f(b)\rvert \le 1$
(나) $f(a+b)=1$

ab의 최솟값을 m이라 할 때, $f(m)=3-\log_3 k$이다. 자연수 k의 값은?

① 16 ② 19 ③ 22
④ 25 ⑤ 28

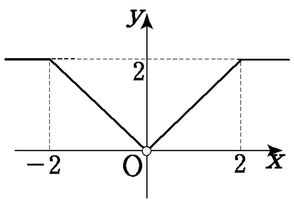
03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

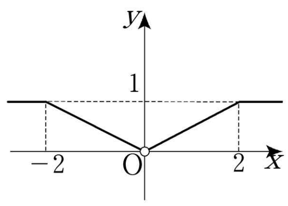
03 로그함수의 그래프3 (로그함수의 성질)

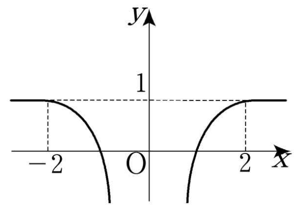
[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 11월 19

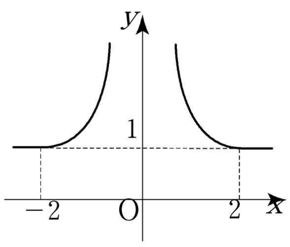
60. 다음은 $y=f(x)$의 그래프이다.

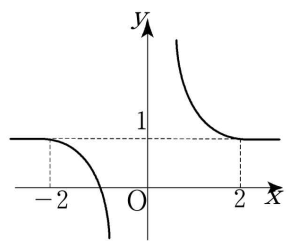


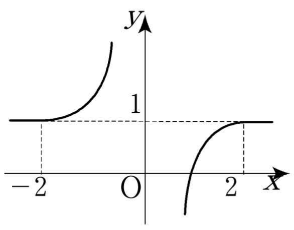
이때, $y=\log_2 f(x)$의 그래프로 가장 적절한 것은?

①


②


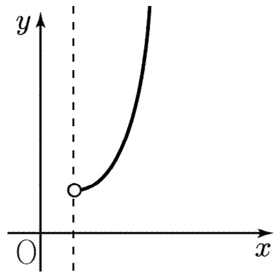
③


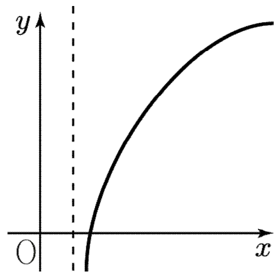
④


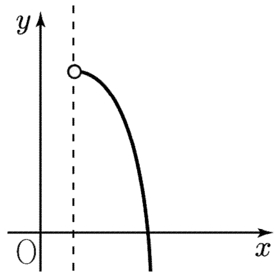
⑤


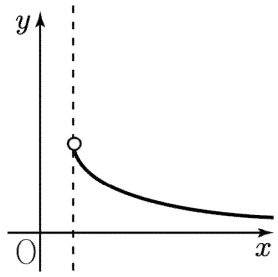
[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 21

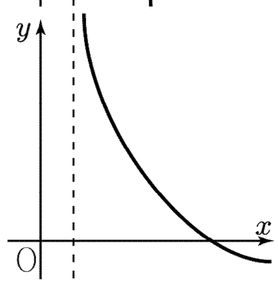
61. 함수 $f(2^x)=-\log_3 x$일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은?

①


②


③


④


⑤


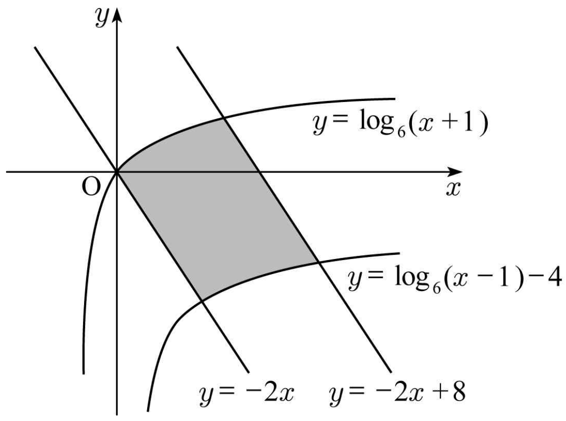
03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

04 로그함수의 그래프4 (평행이동과 넓이)

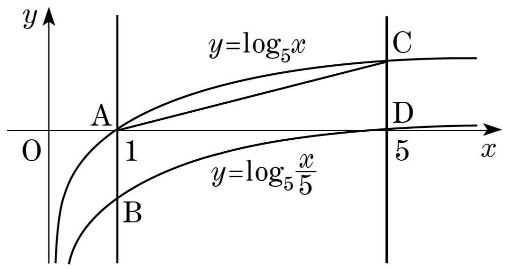
[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 03월 30

62. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_6(x+1)$, $y=\log_6(x-1)-4$ 와 두 직선 $y=-2x$, $y=-2x+8$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.



[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 06월 16

63. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_5 x$, $y=\log_5\frac{x}{5}$ 가 직선 $x=1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 두 곡선이 직선 $x=5$ 와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 곡선 $y=\log_5 x$ 와 두 선분 AD, DC로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 곡선 $y=\log_5\frac{x}{5}$ 와 세 선분 BA, AC, CD로 둘러싸인 부분의 넓이를 T라 할 때 $S+T$의 값은?



① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

03 수1 04 로그함수

01 로그함수의 그래프

05 로그함수의 그래프의 해석1 (기본)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

64. 방정식 $2^{\frac{x}{2}}=\log_{\sqrt{2}}|x|$의 서로 다른 실근의 개수는?

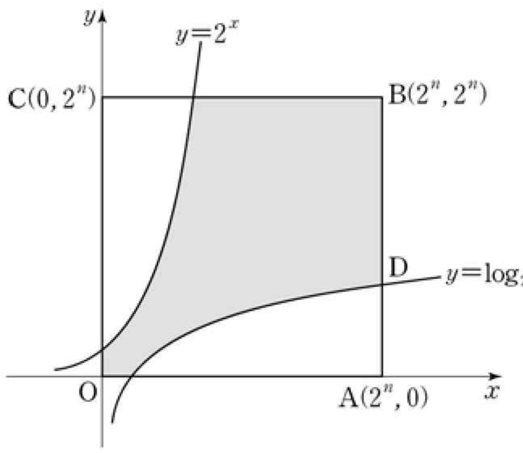
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 0

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 14

65. 양수 a에 대하여 $\log a$의 소수부분를 $g(a)$라 하자. 두 함수 $y=g(3|x|+1)$, $y=mx+1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 최댓값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 O(0, 0), A$(2^n, 0)$, B$(2^n, 2^n)$, C$(0, 2^n)$인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 09월 13

66. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는?

① $-\frac{13}{28}$ ② $-\frac{25}{56}$ ③ $-\frac{3}{7}$

④ $-\frac{23}{56}$ ⑤ $-\frac{11}{28}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 20

67. $x \geq 1$에서 정의 된 함수 $f(x)$를

$f(x)=\log x-[\log x]$라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않는 최대의 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. $f(5)=f(50)$

ㄴ. $f(a)+f(b)=1$이면 $f(ab)=0$이다.

ㄷ. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=-\frac{1}{10^3}x+1$의 그래프의 교점은 모두 4개다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

68. $0<a<1<b$인 두 실수 a, b에 대하여 두 함수

$$f(x)=\log_a(bx-1),\ g(x)=\log_b(ax-1)$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점이 곡선 $y=g(x)$의 점근선 위에 있도록 하는 a와 b 사이의 관계식과 a의 범위를 옳게 나타낸 것은?

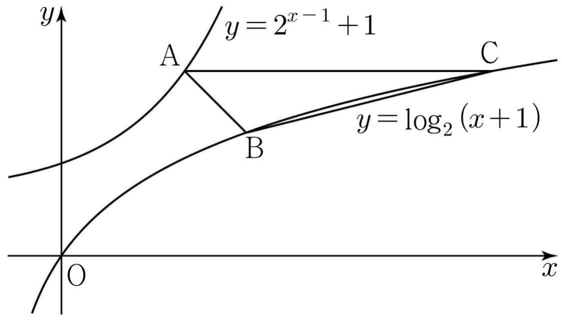
① $b=-2a+2\left(a<a<\frac{1}{2}\right)$ ② $b=2a\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

③ $b=2a\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$ ④ $b=2a+1\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$

⑤ $b=2a+1\left(\frac{1}{2}<a<1\right)$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

69. 그림과 같이 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위의 점 A와 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 두 점 B, C에 대하여 두 점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AC는 x축과 평행하다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(p,\ q)$일 때, $p+q$의 값은?

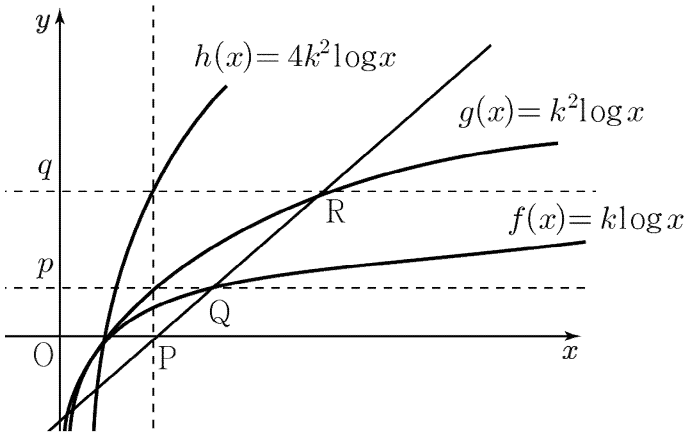


① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ 6

④ $\frac{19}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 28

70. 그림과 같이 세 로그함수 $f(x)=k\log x$, $g(x)=k^2\log x$, $h(x)=4k^2\log x$ 의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(2,\ 0)$ 을 지나고 y축에 평행한 직선이 두 곡선 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 와 만나는 점의 y좌표를 각각 p, q라 하자. 직선 $y=p$와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{Q}(a,\ p)$, 직선 $y=q$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점을 $\mathrm{R}(b,\ q)$라 하자. 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있을 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. (단, $k>1$)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 28

71. 곡선 $y=\log_2 x$를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{5}{2}$만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 두 곡선 $y=\log_2 x$와 $y=f(x)$의 두 교점을 A, B라 할 때, 직선 AB의 기울기는 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 29

72. 자연수 k $(k\le 39)$에 대하여 함수

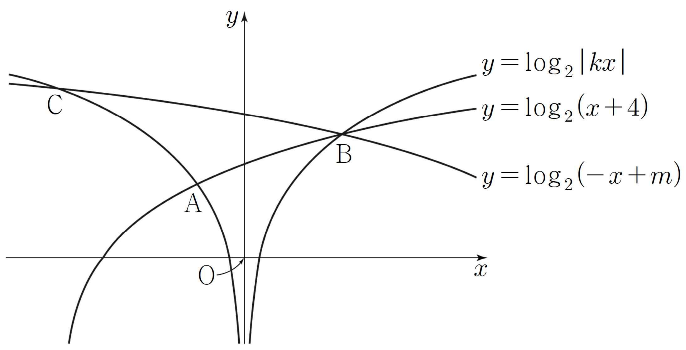
$$f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x-7+k)+2$$

의 그래프와 원 $x^2+y^2=64$가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 a, b라 하자. 다음 조건을 만족시키는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

(가) $ab<0$
(나) $f(a)f(b)<0$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 15

73. 그림과 같이 1보다 큰 실수 k에 대하여 두 곡선 $y=\log_2|kx|$와 $y=\log_2(x+4)$가 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하고, 점 B를 지나는 곡선 $y=\log_2(-x+m)$이 곡선 $y=\log_2|kx|$와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C라 하자. 세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $x_1<x_2$이고, m은 실수이다.)



<보 기>

ㄱ. $x_2=-2x_1$이면 $k=3$이다.

ㄴ. ${x_2}^2=x_1x_3$

ㄷ. 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기의 합이 0일 때, $m+k^2=19$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

74. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=\log_n x,\ y=-\log_n(x+3)+1$$

이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 28

75. 두 자연수 a, b에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $A(a,\ \log_4 b)$, $B(1,\ \log_8\sqrt[4]{27})$이 있다. 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 곡선 $y=-\log_4(3-x)$ 위에 있고, 집합

$$\{n\,|\,b<2^n\times a\le 32b,\ n\text{은 정수}\}$$

의 모든 원소의 합은 25이다. $a+b$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 9

76. 곡선 $y=\left|\log_2(-x)\right|$ 를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=\left|\log_2(-x+8)\right|$ 이 세 점에서 만나고 세 교점의 x좌표의 합이 18일 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[준킬러][수학1] 2지수로그함수1(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] 24
2. [정답] ③
3. [정답] ②
4. [정답] ⑤
5. [정답] ④

6. [정답] 16
7. [정답] ⑤
8. [정답] ③
9. [정답] ④
10. [정답] ②

11. [정답] ④
12. [정답] ③
13. [정답] 43
14. [정답] ④
15. [정답] ③

16. [정답] ⑤
17. [정답] ④
18. [정답] ③
19. [정답] 220
20. [정답] 8

21. [정답] ①
22. [정답] ①
23. [정답] 3
24. [정답] ④
25. [정답] ⑤

26. [정답] ①
27. [정답] 32
28. [정답] 21
29. [정답] 90
30. [정답] ①

31. [정답] ①
32. [정답] ④
33. [정답] ③
34. [정답] 3
35. [정답] 112
36. [정답] 17
37. [정답] 12
38. [정답] ④
39. [정답] ③
40. [정답] 19

41. [정답] 10
42. [정답] ②
43. [정답] ④
44. [정답] 25
45. [정답] ③

46. [정답] ⑤
47. [정답] ①
48. [정답] ⑤
49. [정답] ⑤
50. [정답] ③

51. [정답] 297
52. [정답] ⑤
53. [정답] ⑤
54. [정답] ②
55. [정답] 25

56. [정답] 60
57. [정답] ③
58. [정답] ④
59. [정답] ①
60. [정답] ②

61. [정답] ⑤
62. [정답] 16
63. [정답] ②
64. [정답] ①
65. [정답] ②

66. [정답] ⑤
67. [정답] ⑤
68. [정답] ③
69. [정답] ⑤
70. [정답] 88

71. [정답] 34
72. [정답] 24

73. [정답] ③
74. [정답] ②
75. [정답] 15

76. [정답] ④

[준킬러][수학1] 2지수로그함수1(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] 24

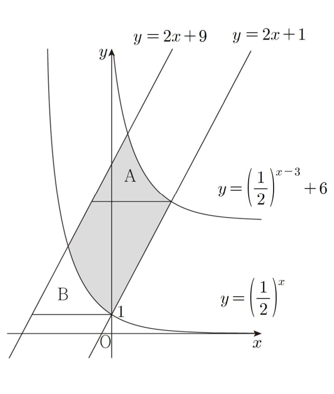
[해설]

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

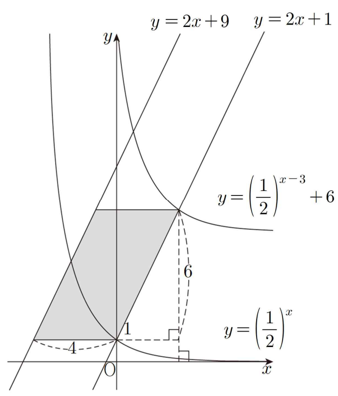
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$의 그래프 위의 점 $(0,\ 1)$이

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프 위의 점 $(3,\ 7)$로 이동한다.

그러므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 교점은 $(3,\ 7)$이다. [그림1]의 A부분과 B부분의 넓이가 서로 같으므로 구하고자 하는 도형의 넓이는 [그림2]와 같이 색칠된 평행사변형의 넓이와 같다. 따라서 구하는 도형의 넓이는 $4\times6=24$이다.



[그림1]



[그림2]

2) [정답] ③

[해설]

$y=f(x)$와 $y=g(x)$ 의 교점에서

$9^x+a=b\cdot3^x+2$

$3^x=t$ (단, $t>0$)라 하면

$t^2-b\cdot t+a-2=0$ …… (1)

ㄱ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나기 위해서 방정식 (1)은 서로 다른 두 양근을 가져야 한다. 따라서 세 조건

$D=b^2-4(a-2)>0$, $b>0$, $a-2>0$

을 만족해야 한다. 그러므로

$b^2>4a-8$ (거짓)

ㄴ. 교점의 x 좌표가 $x=\log_3 2$, $x=\log_3 k$ (단, $k>2$)이므로 방정식 (1)의 두 근은 2 와 k 이다. 근과 계수와의 관계에 의하면

$2+k=b,\ 2k=a-2$

따라서 $a=2b-2$ 이다. (참)

ㄷ. $2k=a-2$ $(k>2)$이므로

$a=2k+2>6$ (참)

3) [정답] ②

[해설]

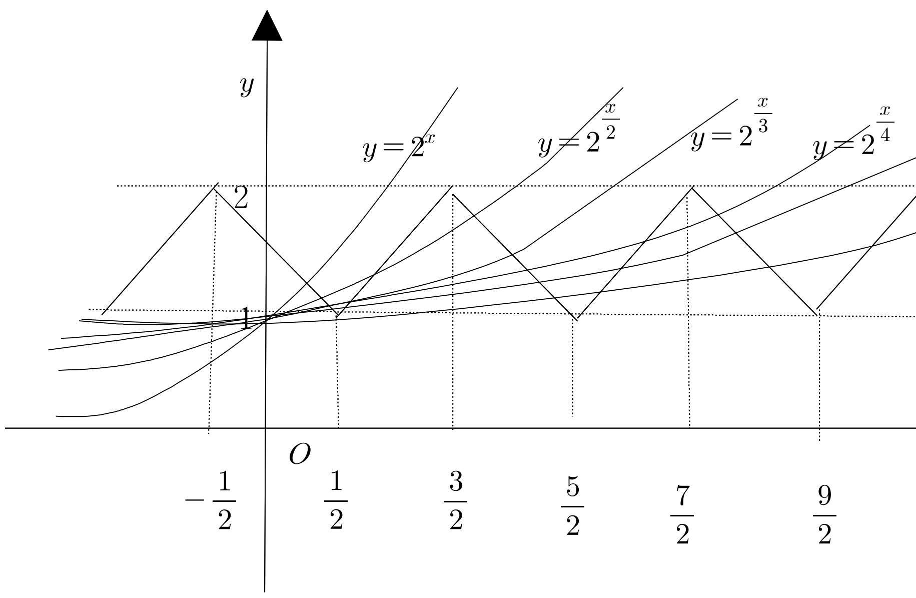
모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2이고

$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right)$

$=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\right) \\ -x+\frac{3}{2} & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와

점$(n,2)$를 지나는 지수함수 $y=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프를 $n=1,2,3,\cdots$일 때 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



$n=1$일 때, 지수함수 $y=2^x$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1개

$n=2$일 때, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{2}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3개

$n=3$일 때, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{3}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 3개

$n=4$일 때, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{4}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 5개

$n=5$일 때, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{5}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 5개

$n=6$일 때, 지수함수 $y=2^{\frac{x}{6}}$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 7개

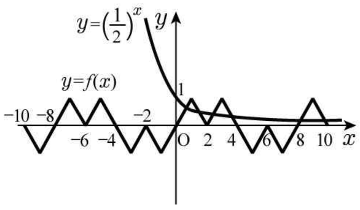
이므로 교점의 개수가 5개가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은

$4+5=9$

4) [정답] ⑤

[해설]

$y=f(x)$와 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 두 그래프의 교점의 개수는 6이다.

5) [정답] ④

[해설]

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 B의 x좌표는 $k+2$, 점 C의 x좌표는 $k+4$이다.

$a^k+2=\frac{12}{5}$에서 $a^k=\frac{2}{5}$ …… ㉠

$a^{k+2}+2=\frac{9}{2}$에서 $a^{k+2}=\frac{5}{2}$ …… ㉡

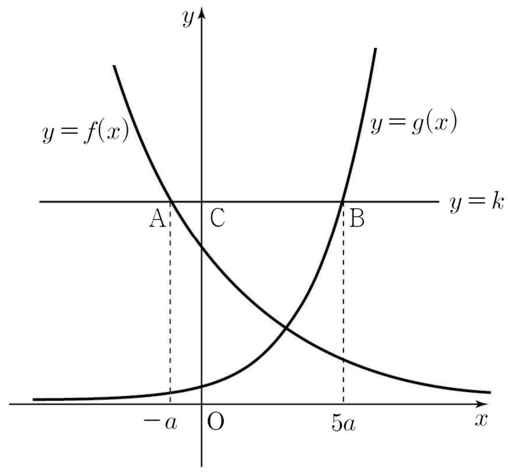
㉠, ㉡에 의해 $a^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$이므로 $a=\frac{5}{2}$

$h=a^{k+4}+2=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^4+2=\frac{141}{8}$

따라서 $h=\frac{141}{8}$

6) [정답] **16**

[해설]



양수 a에 대하여 점 A의 x좌표를 $-a$라 하면 점 B의 x좌표는 $5a$이다.

따라서 $f(-a)=g(5a)$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-a-1}=4^{5a-1}$

$2^{a+1}=2^{10a-2}$이므로 $a+1=10a-2$, $a=\frac{1}{3}$

점 $(5a,\ k)$를 $y=g(x)$에 대입하면 $k=4^{\frac{2}{3}}$

$\therefore k^3=\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3=4^2=16$

7) [정답] ⑤

[해설]

네 점 A, B, C, D의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(\log_2 a,\ a)$, $\mathrm{B}\left(\log_{\frac{1}{4}} a,\ a\right)$, $\mathrm{C}\left(\log_2 \frac{1}{b},\ \frac{1}{b}\right)$, $\mathrm{D}\left(\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{b},\ \frac{1}{b}\right)$이다.

ㄱ. $a=b$이면

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 \mathrm{a}-\log_{\frac{1}{4}} \mathrm{a}=\frac{3}{2}\log_2 \mathrm{a}$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{a}-\log_2 \frac{1}{a}=\frac{3}{2}\log_2 a$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$ (참)

ㄴ. $m_1=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\log_2\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}$ 이므로

$$m_2=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}} a-\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_{\frac{1}{4}} ab}$$

$$=-2\times\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}$$

$$=-2m_1$$

그러므로 $2m_1+m_2=0$ (참)

ㄷ. 직선 AC의 기울기를 $m\,(m>0)$이라 하면
직선 BD의 기울기는 $-2m$이고,
직선 AC와 직선 BD가 서로 수직이므로
$m\times(-2m)=-1$, $m^2=\frac{1}{2}$에서 $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$a-\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log_2 ab$ ⋯ ㉠

직선 AD의 기울기는

$$\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{b}}=\dfrac{a-\frac{1}{b}}{\log_2 a-\frac{1}{2}\log_2 b}=2\sqrt{2}$$

이므로 $a-\frac{1}{b}=\sqrt{2}\log_2\frac{a^2}{b}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\frac{\sqrt{2}}{2}\log_2 ab=\sqrt{2}\log_2\frac{a^2}{b}$

$\log_2 ab=\log_2\frac{a^4}{b^2}$

$a^3=b^3$에서 $a=b$이므로 $\overline{AB}=\overline{CD}$
사각형 ABCD는 평행사변형이고
두 대각선 AC, BD가 서로 수직이므로
사각형 ABCD는 마름모이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

8) [정답] ③

[해설]

점 A, B는 $y=8^x$위의 점이고 y좌표가 각각 a, b이므로
A$(\log_8 a,\ a)$, B$(\log_8 b,\ b)$

따라서 △AEB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{BE}$

$=\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_8 a-\log_8 b)=20$

즉, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)=20$

$\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)=60$--- ㉠

한편 점 C, D는 $y=4^x$위의 점이고y좌표 가 각각
a, b이므로 C$(\log_4 a,\ a)$, D$(\log_4 b,\ b)$

따라서 △CDF의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{FC}$

$=\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_4 a-\log_4 b)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(a-b)\times(\log_2 a-\log_2 b)$

$=\frac{1}{2}\times 60(\because$ ㉠ $)=30$

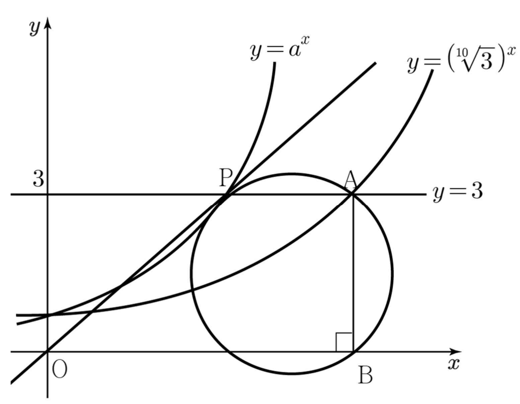
9) [정답] ④

[해설]

$3\cdot 2^x=4^x$, $2^x(2^x-3)=0$, $x=\log_2 3(\because 2^x>0)$이므로 점 B의 좌표는 $(\log_2 3,\ 9)$이다. 세 점 A, C, D의 좌표는 각각 $(0,\ 3)$, $(\log_2 3,\ 3)$, $(2\log_2 3,\ 9)$이다. 그러므로 사각형 ACDB는 밑변의 길이가 $\log_2 3$이고 높이가 6인
평행사변형이다.
따라서 사각형 ACDB의 넓이는 $6\log_2 3$

10) [정답] ②

[해설]



점 A의 y좌표가 3이므로 x좌표는 10, A$(10,3)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발 $B(10, 0)$

점 P는 $y=a^x$과 $y=3$의 교점이므로 $P(\log_a 3, 3)$

삼각형 BAP는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이고 선분 BP는 원의 지름이다. 직선 OP와 직선 BP는 수직이므로

기울기의 곱은 -1이다. $\dfrac{3}{\log_a 3} \times \dfrac{3}{\log_a 3 - 10} = -1$

$(\log_a 3)^2 - 10\log_a 3 + 9 = 0 \Leftrightarrow \log_a 3 = 1$ 또는 $\log_a 3 = 9$

$a = 3$ 또는 $a = 3^{\frac{1}{9}}$ ∴ 모든 실수 a의 값의 곱은 $3^{\frac{10}{9}}$

11) [정답] ④

[해설]

두 곡선 $y=2^x$, $y=15\times 2^{-x}$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$2^t = 15\times 2^{-t}$

$(2^t)^2 = 15$, $2^t = \sqrt{15} < 4$

이므로 $t < 2$ …… ㉠

점 $A(a, 2^a)$과 점 B의 y좌표가 서로 같으므로

$15\times 2^{-x} = 2^a$ …… ㉡

㉡의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(15\times 2^{-x}) = \log_2 2^a$, $\log_2 15 - x = a$

$x = \log_2 15 - a$

이므로 점 B의 x좌표는 $\log_2 15 - a$이다.

이때 ㉠에서 $t<2$이고, $a \geq 2$이므로 점 A의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 크다.

따라서 $\overline{AB} = a - (\log_2 15 - a) = 2a - \log_2 15$

$1 < \overline{AB} < 100$에서

$1 < 2a - \log_2 15 < 100$

$\dfrac{1+\log_2 15}{2} < a < \dfrac{100+\log_2 15}{2}$

이때 $\log_2 2^3 < \log_2 15 < \log_2 2^4$, 즉 $3 < \log_2 15 < 4$이고 a는 자연수이므로

$3 \leq a \leq 51$

따라서 자연수 a의 개수는

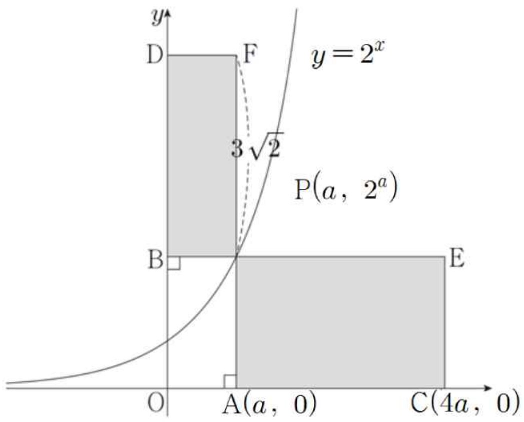
$51 - 3 + 1 = 49$

12) [정답] ③

[해설]

$\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : 3$이므로 점 A, C의 좌표를 각각

$A(a,\ 0)$, $C(4a,\ 0)$이라 하면 점 P의 좌표는 $(a,\ 2^a)$이다.



직사각형 PFDB의 넓이는 $3\sqrt{2}a$이고 직사각형 PACE의 넓이는 $3a\cdot 2^a$이다. 직사각형 PACE의 넓이는 직사각형 PFDB의 넓이의 2배이므로

$3a\cdot 2^a = 3\sqrt{2}a\times 2$, $2^a = 2\sqrt{2}$ ∴ $a = \dfrac{3}{2}$

점 E의 x좌표는 $4a = 4\times\dfrac{3}{2} = 6$이다.

<다른 풀이>

□PFDB : □PACE = 1 : 2이고 $\overline{BP} : \overline{PE} = 1 : 3$이므로

$\overline{PF} : \overline{CE} = 1 : \dfrac{2}{3}$이다. $\overline{PF} = 3\sqrt{2}$이므로

$\overline{CE} = \dfrac{2}{3}\times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$이다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 2^a)$이라 하면

$\overline{CE} = 2^a$이므로 $2\sqrt{2} = 2^a$이고 $a = \dfrac{3}{2}$이다.

따라서 점 E의 x좌표는 $4a = 4\times\dfrac{3}{2} = 6$이다.

13) [정답] **43**

[해설]

정사각형 ACDB의 한 변의 길이가 4이므로

두 점 A, C의 x좌표를 t라 하면 두 점 B, D의 x좌표는 $t+4$이다.

네 점 A, B, C, D의 y좌표가 각각

a^t, b^{t+4}, b^t, c^{t+4}이므로

$a^t=8$, $b^{t+4}=8$, $b^t=4$, $c^{t+4}=4$이다.

$b^{t+4}=8$, $b^t=4$에서 $4b^4=8 \therefore b=2^{\frac{1}{4}}$

$b^t=4$에서 $\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^t=4 \therefore t=8$

$a^t=8$에서 $a^8=8 \therefore a=2^{\frac{3}{8}}$

$c^{t+4}=4$에서 $c^{12}=4 \therefore c=2^{\frac{1}{6}}$

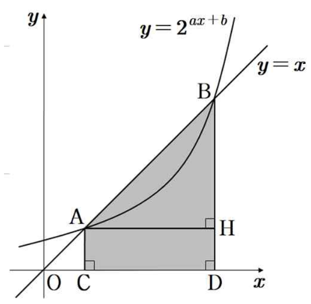
$abc=2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{19}{24}}$

따라서 $p=24$, $q=19$이고 $p+q=43$

14) [정답] ④

[해설]

점 A에서 선분 BD에 수선의 발 H를 내리면 △ABH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AH}=\overline{BH}=6$



점 C의 x좌표를 m이라 하면 점 A, H, B, D의 좌표는 각각

A(m, m), H(m+6, m), B(m+6, m+6),

D(m+6, 0)

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{AC}+\overline{BD})\times\overline{CD}$

$=\frac{1}{2}\times\{m+(m+6)\}\times6$

$=6(m+3)$

따라서 $6(m+3)=30$에서 $m=2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 A(2, 2), B(8, 8)이다.

이때 두 점 A, B가 곡선 $y=2^{ax+b}$위의 점이므로

식에 대입하면 $2^{2a+b}=2$, $2^{8a+b}=8$

즉, $2a+b=1$, $8a+b=3$

두 식을 연립하면 $6a=2$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 $b=\frac{1}{3}$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

15) [정답] ③

[해설]

점 A는 두 곡선 $y=2^{x-3}+1$과 $y=2^{x-1}-2$가 만나는 점이므로

$2^{x-3}+1=2^{x-1}-2$, $3\times2^{x-3}=3$에서 $x=3$

그러므로 점 A의 좌표는 A(3, 2)

점 B의 x좌표를 a라 하면

점 B의 좌표는 B(a, $2^{a-3}+1$)

두 점 B, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이고

$\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로 점 C의 좌표는 C(a-1, $2^{a-3}+2$)

점 C는 곡선 $y=2^{x-1}-2$위의 점이므로

$2^{a-3}+2=2^{a-2}-2$, $2^{a-3}=4$에서 $a=5$

점 B(5, 5)는 직선 $y=-x+k$위의 점이므로 $k=10$

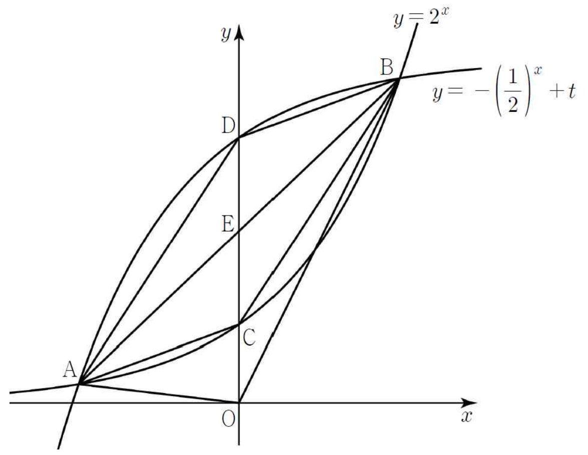
점 A(3, 2)와 직선 $y=-x+10$사이의 거리는

$$\frac{|3+2-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}$

16) [정답] ⑤

[해설]



점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<0<\beta)$라 하면

α, β는 방정식 $(2^x)^2-t\times 2^x+1=0$의 두 근이므로

$$2^\alpha+2^\beta=t,\ 2^\alpha\times 2^\beta=1$$

따라서 $\alpha+\beta=0$, $\beta=-\alpha$

네 점 $A(\alpha,\ 2^\alpha)$, $B(\beta,\ 2^\beta)$, $C(0,\ 1)$, $D(0,\ t-1)$에 대하여

ㄱ. $\overline{CD}=t-2$ (참)

ㄴ. $\overline{AC}=\sqrt{(-\alpha)^2+(-2^\alpha+1)^2}$

$=\sqrt{\beta^2+(2^\beta-t+1)^2}=\overline{BD}$ (참)

ㄷ. $\overline{AD}=\sqrt{\alpha^2+(2^\alpha-t+1)^2}$

$=\sqrt{(-\beta)^2+(-2^\beta+1)^2}=\overline{CB}$

$\overline{AC}=\overline{DB}$, $\overline{AD}=\overline{CB}$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이고 두 대각선의 교점을 E라 하면

$\overline{CE}=\overline{DE}$이므로 점 E의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{t}{2}\right)$

(△ABD의 넓이)

=(△AED의 넓이)+(△BDE의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(-\alpha)\times\overline{DE}+\dfrac{1}{2}\times\beta\times\overline{DE}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t-2}{2}\right)(-\alpha+\beta)$

$=\dfrac{(t-2)(-\alpha+\beta)}{4}=\dfrac{\beta(t-2)}{2}$

(△AOB의 넓이)

=(△OEA의 넓이)+(△OBE의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times(-\alpha)\times\overline{OE}+\dfrac{1}{2}\times\beta\times\overline{OE}$

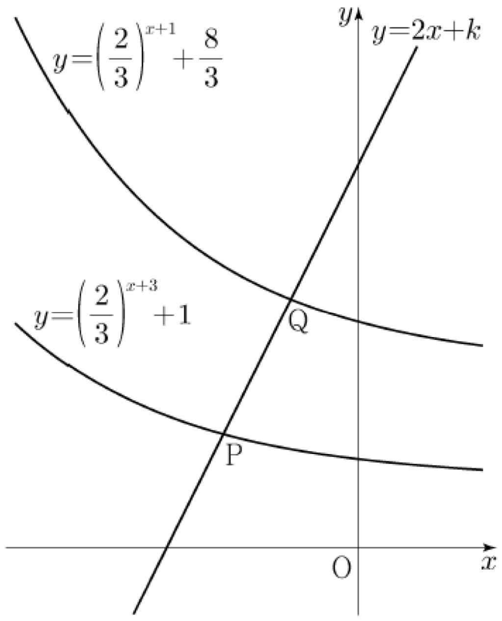
$=\dfrac{t(-\alpha+\beta)}{4}=\dfrac{\beta t}{2}$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\dfrac{t-2}{2}$배이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

17) [정답] ④

[해설]



두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, $q\,(p<q)$라 하면

두 점 P, Q는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$P(p,\ 2p+k)$, $Q(q,\ 2q+k)$로 놓을 수 있다.

이때, $\overline{PQ}=\sqrt{5}$, 즉 $\overline{PQ}^2=5$이므로 $(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$

$(q-p)^2=1$

$q-p>0$이므로 $q-p=1$

즉, $q=p+1$이다.

한편, 점 P는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+1=2p+k$ …… ㉠

점 Q는 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\dfrac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=2p+k+2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}+\dfrac{8}{3}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+3}+3$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

$p+2=0$, 즉 $p=-2$

$p=-2$를 ㉠에 대입하면

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2+3}+1=2\times(-2)+k$

따라서 $k=\dfrac{17}{3}$

18) [정답] ③

[해설]

점 B의 좌표가 $B(0,\ 2^a)$이므로 $\overline{OB}=2^a$

$\overline{OB}=3\times\overline{OH}$에서 $\overline{OH}=\dfrac{2^a}{3}$

점 A의 x좌표를 k라 하면 $A\left(k, \frac{2^a}{3}\right)$

점 A는 곡선 $y=2^{-x+a}$ 위의 점이므로

$2^{-k+a}=\frac{2^a}{3}$에서 $2^{-k}=\frac{1}{3}$, $2^k=3$

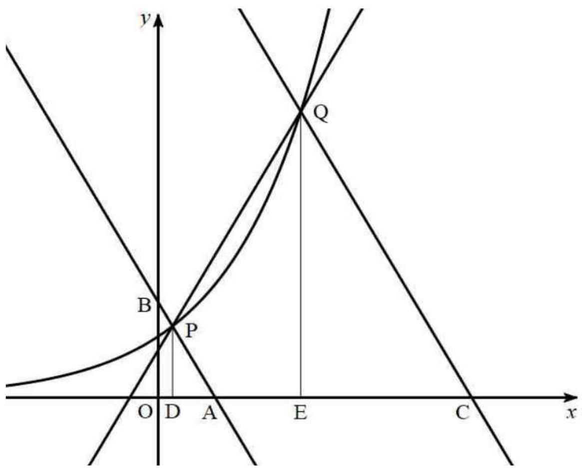
또한 점 A는 곡선 $y=2^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{2^a}{3}=2^k-1=3-1=2$에서 $2^a=6$

따라서 $a=\log_2 6$

19) [정답] 220

[해설]



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB}=k$라 하면

$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=4\overline{PB}-\overline{PB}=3\overline{PB}=3k$

이고,

$\overline{CQ}=3\overline{AB}=3\times\overline{PB}=12\overline{PB}=12k$

이므로 $\overline{AP}:\overline{CQ}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle PDA$와 $\triangle QEC$는 닮음이므로

$\overline{PD}:\overline{QE}=\overline{AP}:\overline{CQ}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로 $2^b=4\times2^a=2^{a+2}$에서

$b=a+2$

즉,

$$m=\frac{2^b-2^a}{b-a}=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}=\frac{3\times2^a}{2}=3\times2^{a-1}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$ …… ㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$x=a+\frac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\frac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD$와 $\triangle ABO$는 닮음이므로

$AO:\overline{DO}=AB:PB=4:1$

$a+\frac{2}{3}:a=4:1$

$a=\frac{2}{9}$

$b=a+2=\frac{2}{9}+2=\frac{20}{9}$

따라서

$$90\times(a+b)=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)=90\times\frac{22}{9}=220$$

20) [정답] 8

[해설]

$\overline{OA}:\overline{OB}=\sqrt{3}:\sqrt{19}$이므로 $\overline{OA}=\sqrt{3}k(k>0)$

이라 하면 $\overline{OB}=\sqrt{19}k$이고 $\overline{AB}=4k$이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. 직선 OA와 x축이 이루는 예각의 크기가 60°이므로

$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}k$, $y_1=\frac{3}{2}k$

따라서 $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 직선 AB와 x축이 이루는 예각의 크기가 30°이다.

$x_2-x_1=4k\cos30^\circ=2\sqrt{3}k$에서

$x_2=x_1+2\sqrt{3}k=\frac{3\sqrt{3}}{2}k$

$y_2-y_1=4k\sin30^\circ=2k$에서

$y_2=y_1+2k=\frac{7}{2}k$

따라서 $B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$

점 A는 곡선 $y=a^{-2x}-1$ 위의 점이므로

$\frac{3}{2}k=a^{\sqrt{3}k}-1$에서 $a^{\sqrt{3}k}=\frac{3k+2}{2}$ …… ㉠

점 B는 곡선 $y=a^x-1$ 위의 점이므로

$\frac{7}{2}k=a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}-1$에서 $a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k}=\frac{7k+2}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{3k+2}{2}\right)^3=\left(\frac{7k+2}{2}\right)^2$$

$27k^3-44k^2-20k=0$, $k(k-2)(27k+10)=0$

$k>0$이므로 $k=2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=4k=8$

21) [정답] ①

[해설]

$f(g(x))=f(a^x)=-a^{2x}+2a^x+1$

$=-(a^x-1)^2+2\ (-1\le x\le 2)$

$g(f(x))=a^{f(x)}=a^{-x^2+2x+1}=a^{-(x-1)^2+2}\ (-1\le x\le 2)$

(i) $a>1$일 때,

$a^x=t\ (t>0)$라 하면

$f(g(x))=-(t-1)^2+2\left(\frac{1}{a}\le t\le a^2\right)$

이때, $0<\frac{1}{a}<1$이고 $a^2>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다. 함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최대일 때 최댓값을 갖는다. 따라서 $x=1$일 때 최댓값 a^2을 가지므로 $a^2=2$

$\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>1)$

(ii) $0<a<1$일 때,

$a^x=t\ (t>0)$라 하면

$f(g(x))=-(t-1)^2+2\left(a^2\le t\le\frac{1}{a}\right)$ 이때,

$0<a^2<1$이고 $\frac{1}{a}>1$이므로 $f(g(x))$의 최댓값은 2이다.

함수 $g(f(x))=a^{f(x)}$은 $f(x)$가 최소일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $x=-1$일 때 최댓값 a^{-2}을 가지므로 $a^{-2}=2$

$\therefore\ a=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ 0<a<1)$

(i), (ii)에서 모든 a값의 합은 $\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22) [정답] ①

[해설]

$a^x=t$라 하면 $\frac{1}{a}\le t\le a$이고

$f(x)=t^2+4t-2=(t+2)^2-6$

$t=a$일 때 최댓값 $a^2+4a-2=10$이므로 $a=2$

최솟값은 $t=\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{4}+2-2=\frac{1}{4}$

23) [정답] 3

[해설]

함수 $y=4^x+4^{-x}-2(2^x+2^{-x})+5$에서

$2^x+2^{-x}=X$라 하면

$2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$이므로 $X\ge 2$이다.

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=X^2-2$

$y=(X^2-2)-2X+5=(X-1)^2+2(X\ge 2)$

$\therefore\ X=2$일 때, 최솟값 $y=4-4+3=3$. 답 3

24) [정답] ④

[해설]

$t=2^{x-2}+2^{-x}$라 하면 $t=2^{x-2}+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^{x-2}2^{-x}}=1$이고,

$2^x+2^{2-x}=4(2^{x-2}+2^{-x})=4t$이므로

$f(t)=t^2-4t+8=(t-2)^2+4$ (단, $t\ge 1$)

그러므로 최솟값은 4이다.

25) [정답] ⑤

[해설]

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(\beta-\alpha)(3^\alpha+3^{-\beta})=4(3^\alpha+3^{-\alpha-4})$

$\ge 4\times 2\sqrt{3^\alpha\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

26) [정답] ①

[해설]

$\mathrm{P}(a,\ 2^{-a+3}+4)$, $\mathrm{Q}(a,\ -2^{a-5}-3)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}$이다. $2^{-a+3}>0$, $2^{a-5}>0$ 이므로

산술・기하평균의 관계에 의해

$\overline{\mathrm{PQ}}=7+2^{-a+3}+2^{a-5}\ge 7+2\sqrt{2^{-a+3}2^{a-5}}$

$=7+2\sqrt{2^{-2}}=8$ (등호는 $a=4$일 때 성립)

따라서 선분 PQ 길이의 최솟값은 8이다.

선분 PQ를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는

$4\sqrt{2}$ 이다. ∴ 정사각형 넓이의 최솟값은 32

27) [정답] 32

[해설]

점 A의 좌표를 $(a,\ 2^a)$라고 하면 $\overline{AB}=2^a$

$\overline{AB}:\overline{BC}=2:1$ 이므로 $\overline{BC}=2^{a-1}$

따라서 □ABCD의 넓이는 2^{2a-1}

점 P의 좌표가 $(a,\ 2^{4-a})$이므로

점 E의 y좌표는 2^{4-a} 즉, $\overline{EH}=2^{4-a}$

$\overline{EH}:\overline{HG}=1:2$ 이므로 $\overline{HG}=2^{5-a}$

따라서 □EFGH의 넓이는 2^{9-2a}

두 직사각형의 넓이의 합은 절대부등식의 성질에 의하여

$2^{2a-1}+2^{9-2a}\geq 2\sqrt{2^{2a-1}\cdot 2^{9-2a}}=2^5=32$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\dfrac{5}{2}\text{일 때만 성립}\right)$

그러므로 최솟값은 32

28) [정답] 21

[해설]

$2^{x+y}+2^x+2^y=1160 \Leftrightarrow 2^y(2^x+2^{x-y}+1)=2^3\cdot 5\cdot 29$

$\Leftrightarrow 2^{y-3}(2^x+2^{x-y}+1)=145$

따라서 $2^{y-3}=1,\ 2^x+2^{x-y}+1=145$이어야 한다.

$2^{y-3}=1$에서 $y-3=0$이므로 $y=3$

이때, $2^x+2^{x-3}+1=145$에서

$2^x=2^7$이므로

$x=7$

∴ $\alpha\beta=3\times 7=21$

[다른 풀이]

$2^{x+y}+2^x+2^y=1160$에서

$2^x2^y+2^x+2^y+1=1161$이므로

$(2^x+1)(2^y+1)=1161$

이때, $1161=3^3\cdot 43$이고 $2^x+1,\ 2^y+1$은 모두 3 이상인 홀수이다.

(ⅰ) $2^x+1=3^2\cdot 43,\ 2^y+1=3$일 때,

$2^x=386$인 자연수 x가 존재하지 않는다.

(ⅱ) $2^x+1=3\cdot 43,\ 2^y+1=3^2$일 때,

$2^x=128$에서 $x=7$

$2^y=8$에서 $y=3$

(ⅲ) $2^x+1=43,\ 2^y+1=3^3$일 때,

자연수 x, y가 존재하지 않는다.

∴ $\alpha\beta=3\times 7=21$

29) [정답] 90

[해설]

$\begin{cases} x^2=y^3 \\ x^y=y^x \end{cases}$ 두 식의 양변에 상용로그를 취하면

$2\log x=3\log y$ ……㉠

$y\log x=x\log y$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{2\log x}{y\log x}=\dfrac{3\log y}{x\log y}$ 따라서 $\dfrac{2}{y}=\dfrac{3}{x}$이므로 $2x=3y$

이다. 이 식을 $x^2=y^3$에 대입하면 $x^2=\left(\dfrac{2}{3}x\right)^3 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{8}{27}x^3$

이다. 따라서 $x=\dfrac{27}{8}$이고 $2x=3y$에 대입하면 $y=\dfrac{9}{4}$이다.

그러므로 $16(\alpha+\beta)=90$이다.

<다른 풀이>

$x^2=y^3$에서 $y=x^{\frac{2}{3}}$

이 식을 $x^y=y^x$에 대입하여 정리하면 $x^{x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{2}{3}x}$이다.

$x>1$이므로 $x^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}x$이다. 양변을

세제곱하면$x^2=\dfrac{8}{27}x^3$이다.

따라서 $x=\dfrac{27}{8}$이고 $y=x^{\frac{2}{3}}$에 대입하면 $y=\dfrac{9}{4}$이다.

그러므로 $16(\alpha+\beta)=90$이다.

30) [정답] ①

[해설]

방정식 $3^{2x}-k\cdot 3^{x+1}+3k+15=0$의 두 실근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하자. $3^x=t\ (t>0)$라 하면 $t^2-3kt+3k+15=0$의 두

실근은 3^{α}, $3^{2\alpha}$ 따라서 근과 계수와의 관계에 의해서

$$\begin{cases} 3^{\alpha}+3^{2\alpha}=3k & \cdots\cdots ㉠ \\ 3^{\alpha}\cdot 3^{2\alpha}=3k+ & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠과 ㉡에 의하여 $(3^{\alpha})^3=3^{\alpha}+(3^{\alpha})^2+15$

$3^{\alpha}=s\ (s>0)$라 하면 $s^3-s^2-s-15=0$

$(s-3)(s^2+2s+5)=0$이므로 $s=3^{\alpha}=3$

$3k=3^{\alpha}+(3^{\alpha})^2=3+3^2=12$ $\therefore\ k=4$

31) [정답] ①

[해설]

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	q	$2^{a+3}-16$	r	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	s	S_3
	S_4	S_5	S_6	

그림과 같이 빈 칸에 들어갈 수를 각각 p, q, r, s라 하자.

$S_1=S_4$이므로 $q=p$

$S_3=S_6$이므로 $r=2^{a+3}-16$

$S_3=S_4$이므로 $s=4^a-2^{a+3}+16+p$

	l_4	l_5	l_6	
l_1	4^a	p	-2^{a+1}	S_1
l_2	p	$2^{a+3}-16$	$2^{a+3}-16$	S_2
l_3	-2^{a+1}	$2^{a+3}-16$	$4^a-2^{a+3}+16+p$	S_3
	S_4	S_5	S_6	

$S_1=S_3=S_4=S_6=4^a-2^{a+1}+p$

$S_2=S_5=2^{a+4}-32+p$이므로

$4^a-2^{a+1}+p=2^{a+4}-32+p$

$(2^a)^2-18\times 2^a+32=0$, $(2^a-2)(2^a-16)=0$

$2^a=2$ 또는 $2^a=16$

$\therefore a=1$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 5

32) [정답] ④

[해설]

$p=\sqrt{2}-1$이라 하면 $p^2=3-2\sqrt{2}$이고

$(p^2)^{5-n}=p^{10-2n}$이므로 $p^m\geq p^{10-2n}$이다.

$0<p<1$이므로 $m\leq 10-2n$이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, $1\leq m\leq 8$

(ⅱ) $n=2$일 때, $1\leq m\leq 6$

(ⅲ) $n=3$일 때, $1\leq m\leq 4$

(ⅳ) $n=4$일 때, $1\leq m\leq 2$

(ⅴ) $n\geq 5$일 때, 부등식을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 m, n의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 $8+6+4+2=20$

33) [정답] ③

[해설]

$A=\left\{x\,\middle|\,\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}<\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}\right\}=\{x\,|\,x+2>x^2\}$

$=\{x\,|-1<x<2\}$

$B=\{x\,|\,2^{|x-2|}\leq 2^a\}=\{x\,|\,|x-2|\leq a\}$

$=\{x\,|\,2-a\leq x\leq 2+a\}$, $A\cap B=A$이므로 $A\subset B$이다.

그러므로 $2-a\leq -1$이고 $2\leq 2+a$이다.

즉, $3\leq a$이다. $\therefore a$의 최솟값은 3이다.

34) [정답] 3

[해설]

$x^2-(a+b)x+ab<0\Leftrightarrow(x-a)(x-b)<0$, $a<b$이므로

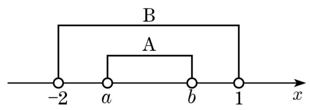
$a<x<b$ $\therefore$ $A=\{x\,|\,a<x<b\}$

한편, $2^{2x+2}-9\cdot 2^x+2<0\Leftrightarrow 4(2^x)^2-9\cdot 2^x+2<0$

$\Leftrightarrow(4\cdot 2^x-1)(2^x-2)<0\Leftrightarrow\frac{1}{4}<2^x<2$, $2^{-2}<2^x<2^1$

$\therefore$ $B=\{x\,|-2<x<1\}$

$A\subset B$이므로



$-2\leq a<b\leq 1$ 따라서 $b-a$의 최댓값은 $1-(-2)=3$

35) [정답] 112

[해설]

$2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a=(2^x-8)(2^x+14)<0$ 양변을 비교하면

$-a=-112$ $\therefore$ $a=112$

<다른 풀이>

$2^{2x}+3\cdot 2^{x+1}-a<0$에서 $2^x=t(t>0)$라 하면 집합 A에서 $0<t<8$, 집합 B에서 $t^2+6t-a<0(t>0)$

함수 $f(t)=t^2+6t-a(t>0)$의 그래프에 대하여 t축 보다 아래에 있는 t값의 범위가 $0<t<8$이 되기 위해서는 $f(8)=0$이어야 한다. $f(8)=64+48-a=0$ $\therefore$ $a=112$

36) [정답] 17

[해설]

주어진 부등식의 양변에 $3^{-2}\times 3^p$을 곱하면

$(3^x-3^{-2})(3^x-3^p)\le 0$

p가 자연수이므로 $3^{-2}\le 3^x\le 3^p$ $\therefore -2\le x\le p$

$-2\le x\le p$를 만족시키는 정수 x는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ p$

이때, 정수 x의 개수는 $p+3=20$ 따라서 $p=17$

37) [정답] 12

[해설]

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\le 0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-3n\right\}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-16\right\}\le 0$$

(ⅰ) $3n\le 16$일 때,

$3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 16$을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되도록 하려면 $2^2<3n\le 2^3$, $n=2$

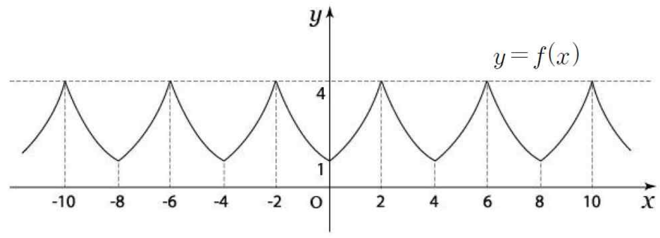
(ⅱ) $3n>16$일 때,

$16\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 3n$을 만족시키는 정수 x의 개수가 2가 되도록 하려면 $2^5\le 3n<2^6$, $n=11,\ 12,\ \cdots,\ 21$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n의 개수는 12

38) [정답] ④

[해설]



$\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}\ge\left(\frac{1}{3}\right)^3\Leftrightarrow f(x)\le 3$ $\cdots$㉠

$-2\le x\le 2$에서 ㉠의 해는 $-\log_2 3\le x\le\log_2 3$ $\cdots$㉡

㉡에서 정수 $x=-1,\ 0,\ 1$이므로

$-10\le x\le 10$에서 ㉠의 해 중 정수는

$x=-9,\ -8,\ -7,\ -5,\ -4,\ -3,\ -1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9$

따라서 정수 x의 개수는 15

39) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\left[\frac{1}{2}\right]=0$, $\left[-\frac{1}{2}\right]=-1$이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^0+2^{-1}}{2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}\ \text{(참)}$$

ㄴ. x가 정수이고 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로

$f(x)=\frac{2^x+2^{-x}}{2}\ge\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=1$ (단 등호는 $x=0$일 때, 성립한다.) (참)

ㄷ. $1<x<2$, $-2<x<-1$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=\frac{2+\frac{1}{4}}{2}=\frac{9}{8}$이다.

따라서 방정식의 해는 무수히 많다. (거짓)

40) [정답] 19

[해설]

$3^x=t$라 할 때, 주어진 방정식은

$t^2-2(a+4)t-3a^2+24a=0$ ……㉠

x가 양수일 때, $t>1$이므로 방정식 ㉠의 서로 다른 해는

모두 1보다 커야한다.

따라서 방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때 $D>0$이고,

$f(t)=t^2-2(a+4)t-3a^2+24a$라 할 때

$f(1)>0$, 이차함수 $f(t)$의 축 $x=a+4>1$이어야 한다.

(ⅰ) $D=(a+4)^2-(-3a^2+24a)>0$에서

$4a^2-16a+16>0$

$4(a-2)^2>0$

따라서 $a\neq 2$인 모든 실수 a에 대하여 위 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $f(1)=1-2(a+4)-3a^2+24a>0$에서

$3a^2-22a+7<0$

$(3a-1)(a-7)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<a<7$

(ⅲ) $a+4>1$에서 $a>-3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\frac{1}{3}<a<7$이다.

따라서 정수 a는 1, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 구하는 합은 $1+3+4+5+6=19$

41) [정답] 10

[해설]

a, $b(a<b)$는 방정식 $4^x=3\cdot 2^{x+1}-k$의 근이므로

$2^x=t(t>0)$

이라 하면 $t^2-6t+k=0$의 두 근 2^a, 2^b은 $0<2^a<1<2^b$

$h(t)=t^2-6t+k$라 하면 $h(0)=k>0$, $h(1)=k-5<0$

따라서 $0<k<5$

그러므로 만족하는 모든 자연수 k의 값의 합은 10

42) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $x=-1$을 대입하면 $|a^0-1|=0$ (참)

ㄴ. $x<-1$인 곳에서는 교점이 반드시 생긴다.

$x>0$인 곳에서 교점을 조사해 보면,

$a^x=1-a^{x-1}$, $a^x+a^{-x-1}=1$

이때 산술 기하 평균에서 $a^x+a^{-x-1}\geq 2\sqrt{a^{-1}}$이므로 $a=4$일 때 등호 성립조건에 부합한다.

따라서 $4^x=4^{-x-1}$ 즉, $x=-\frac{1}{2}$에서 접한다.

그러므로 두 점에서 만난다. (참)

ㄷ. $x<-1$에서의 교점은 -2보다 크고 -1보다 작다.

$x>-1$에서의 교점은 $a^x=1-a^{x-1}$을 풀어보면

$t=1-\frac{1}{at}$ ($\because a^x=t$로 치환) 즉, $at^2-at+1=0$

이때 $a^\alpha\times a^\beta=\frac{1}{a}=a^{-1}$이므로 두 근의 합은 -1이다.

따라서 모든 교점의 합은 -3과 -2사이이다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

43) [정답] ④

[해설]

$f(x)=(2^x)^2-(k+1)2^x+4\geq 0$

$g(t)=t^2-(k+1)t+4\geq 0$ $(t=2^x>0)$

(1) $y=g(t)$의 대칭축이 양수 일 때,

$-1<k\leqq 3$

(2) $y=g(t)$의 대칭축이 음수 일 때,

$k<-1$

(3) $k=-1$일 때, $g(t)=t^2+4>0$

(1), (2), (3)에서 $k\leqq 3$

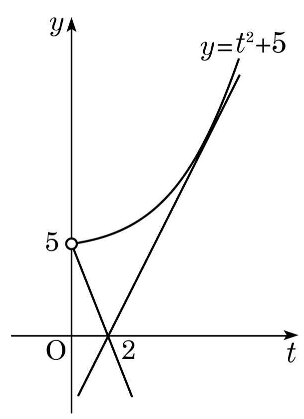
44) [정답] 25

[해설]

$5^x=t$ $(t>0)$라 하면 $t^2-kt+2k+5\geq 0$

$\Leftrightarrow t^2+5\geq k(t-2)$, $f(t)=t^2+5$, $g(t)=k(t-2)$라 하면

$t>0$인 모든 t에 대하여 $f(t)\geq g(t)$이어야 한다.



(ⅰ) $y=g(t)$의 그래프가 점 (0, 5)를 지날 때,

$5=k(0-2)$에서 $k=-\frac{5}{2}$

(ⅱ) 두 함수 $f(t)$, $g(t)$의 그래프가 접할 때,

방정식 $t^2-kt+2k+5=0$이 중근을 가지므로

판별식 $D=k^2-8k-20=0$에서 $(k-10)(k+2)=0$

$\therefore$ $k=10$ 또는 $k=-2$ 이때, $k>0$이므로 $k=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{5}{2}\le k\le 10$ $\therefore$ $|\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

<다른 풀이>

지수부등식 $5^{2x}-k\cdot 5^x+2k+5\ge 0$에서

$5^x=t$ $(t>0)$로 놓으면 $t^2-kt+2k+5\ge 0$

$f(t)=t^2-kt+2k+5=\left(t-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{1}{4}k^2+2k+5$ $(t>0)$

라 하면 꼭짓점의 t좌표는 $\frac{k}{2}$이다.

(ⅰ) $\frac{k}{2}>0$일 때,

$-\frac{1}{4}k^2+2k+5\ge 0$이어야 하므로 $k^2-8k-20\le 0$

$\therefore$ $-2\le k\le 10$

그런데, $k>0$이므로 $0<k\le 10$

(ⅱ) $\frac{k}{2}\le 0$일 때,

$f(0)\ge 0$이어야 하므로 $2k+5\ge 0 \Leftrightarrow k\ge -\frac{5}{2}$

그런데, $k\le 0$이므로 $-\frac{5}{2}\le k\le 0$

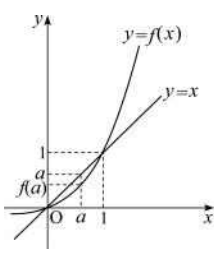
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $-\frac{5}{2}\le k\le 10$ $\therefore$

$|\alpha\beta|=\left|-\frac{5}{2}\times 10\right|=25$

45) [정답] ③

[해설]

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 점 $(1,1)$에서 만나므로 오른쪽 그림에서



$0<a<1$이면 $f(a)<a$이고,

$a>1$이면 $f(a)>a$이다. (참)

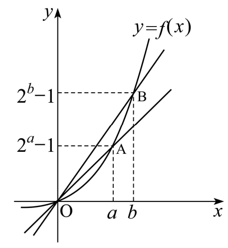
ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{2^b-1-(2^a-1)}{b-a}=\frac{2^b-2^a}{b-a}$ 이고

기울기가 1보다 큰 경우는 $\frac{2^b-2^a}{b-a}>1$

즉, $b-a<2^b-2^a$

기울기가 1보다 작은 경우는



$\frac{2^b-2^a}{b-a}<1$

즉, $b-a>2^b-2^a$ (거짓)

ㄷ. (직선 OA의 기울기)

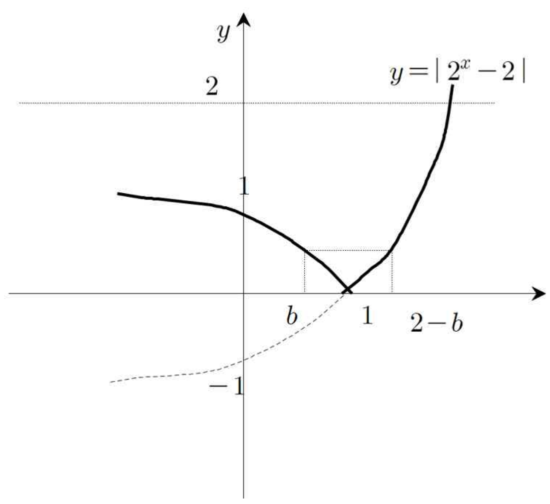
<(직선 OB의 기울기)이므로

$\frac{2^a-1}{a}<\frac{2^b-1}{b}$

$\therefore$ $b(2^a-1)<a(2^b-1)$ (참)

46) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. $0<a<b<c$ 일 때, $f(a)>f(b)>f(c)$ 를 만족하기 위한 필요조건은 $0<b<1$ 이다. 그 이유는 만약 $b\geq 1$ 인 경우에는 함수가 증가하는 형태이므로 $f(b)<f(c)$ 가 되어 조건을 만족하지 않는다. 그림에서 알 수 있듯이 $b<c$ 일 때 $f(b)>f(c)$ 를 만족하기 위한 충분조건은 $b<c<2-b$ 이다. (거짓)

ㄴ. 조건은 만족하는 a, b, c 의 범위가 $0<a<1$, $a<b<1$, $b<c<2-b$ 이므로 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 의 최댓값은 1 보다 작다. 따라서 $0<f(a)+f(b)+f(c)<3$ 이다. (참)

ㄷ. $0<a<1$ 이므로 $f(x)=a$ 의 실근의 개수는 2 개다. (참)

47) [정답] ①

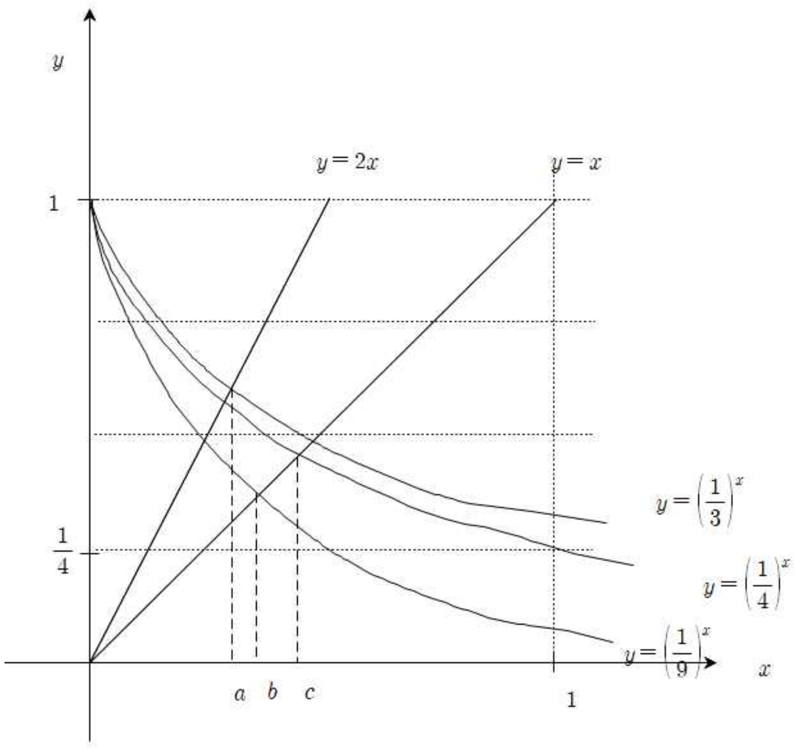
[해설]

방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^a=2a$ 의 근 a는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 과 $y=2x$ 의

교점의 x 좌표로 볼 수 있다. 마찬가지 방법으로 방정식 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2b}=b$ 의 근 b 는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x}$ 과 $y=x$ 의 교점의 x 좌표로 볼 수 있고, 방정식 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2c}=c$ 의 근 c 는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ 과 $y=x$ 의 교점으로 볼 수 있다.

아래 그림에서 알 수 있듯이

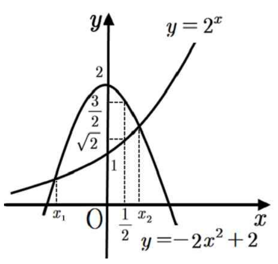
$\therefore\ a<b<c$



48) [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점이 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ (단, $x_1<x_2$)이므로 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. 위의 그래프에서 $\frac{1}{2}<x_2$ (참)

ㄴ. 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$의 기울기를 구하면 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

그런데 위의 그래프에서 $(0,\ 1)$, $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$를 지나는 기울기가 1이므로 두 기울기를 비교해보면 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$

$\therefore y_2-y_1<x_2-x_1$ $(\because x_1<x_2)$ (참)

ㄷ. 위의 그래프에서 $-1<x_1<0$, $\frac{1}{2}<x_2<1$이므로

따라서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<1$ …… ㉠

그런데, 곡선 $y=-2x^2+2$이 y축 대칭함수이므로

$|x_1|>|x_2|$, 즉, $x_1+x_2<0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$

식을 정리하면 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^1$

$\frac{2}{\sqrt{2}}<2^{x}_1\cdot 2^{x}_2<2$

$\therefore \frac{2}{\sqrt{2}}<y_1\cdot y_2<2$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

49) [정답] ⑤

[해설]

자연수 k에 대하여

$\log k=n+\alpha$ (n은 정수, $0\leq\alpha<1$)

점 $P_k(\alpha,\ n)$이 곡선 $y=(\sqrt{10})^x$ 위에 있으려면

$n=(\sqrt{10})^{\alpha}=10^{\frac{\alpha}{2}}$

$\alpha=2\log n=\log n^2$

$0\leq\alpha<1$이므로 $\alpha=\log n^2$ 의 값은

$n=1,\ 2,\ 3$일 때, $\log 1$, $\log 4$, $\log 9$

$\therefore \log k=1$ 또는 $\log k=2+\log 4$

또는 $\log k=3+\log 9$

$\therefore k=10$ 또는 $k=400$ 또는 $k=9000$

따라서 모든 k의 값의 합은

$10+400+9000=9410$

50) [정답] ③

[해설]

$f(x)-g(x)=a^{2x}-a^{x+1}+2$

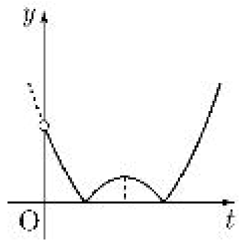
따라서 $a^x=t$라 하면

$f(x)-g(x)=t^2-at+2$

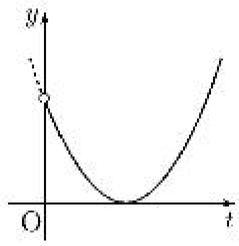
이차방정식 $t^2-at+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8=0$에서 $a=2\sqrt{2}$ ($\because$ $a>1$)

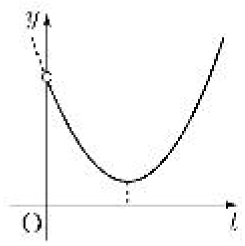
$y=t^2-at+2$는 대칭축이 $t=\frac{a}{2}$이고 y절편이 2인 이차함수이므로 a의 크기에 따라서 $y=|t^2-at+2|$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



$a>2\sqrt{2}$



$a=2\sqrt{2}$



$1<a<2\sqrt{2}$

이때, $t=a^x$는 모든 실수에서 임의의 양수로의 일대일대응이고 $x_1<x_2$에 대하여 $t_1<t_2$를 만족한다.

$\cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. $a=2\sqrt{2}$일 때, $y=|t^2-at+2|$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 (접하므로) $y=h(x)$의 그래프도 x축과 한 점에서 만난다. ($\because$ ㉠) (참)

ㄴ. $a=4$일 때,

$t^2-4t+2=0$에서 $t=2\pm\sqrt{2}$이므로

$y=|t^2-at+2|$의 그래프는 $0<t<2-\sqrt{2}$에서 감소하고 $2-\sqrt{2}<t<2$에서 감소한다. $\cdots\cdots$ ㉡

$x<\frac{1}{2}$일 때, $0<t<4^{\frac{1}{2}}=2$이므로 ㉠, ㉡에 의해서 $h(x_1)$, $h(x_2)$의 대소를 비교할 수 없다.

ㄷ. $y=t^2-at+2$의 그래프가 직선 $y=1$과 접할 때, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다.

$t^2-at+2=1$에서 $t^2-at+1=0$

위의 방정식은 $a=2$일 때 중근을 가지므로 $a=2$일 때, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 오직 한 점에서 만나게 된다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

51) [정답] 297

[해설]

$P_1(0,\ 0)$, $P_3(0,\ \log 3)$, $P_{10}(1,\ 0)$이다.

$10<m<100$이므로 $\log m$의 지표는 1이고, 가수는 $(\log m-1)$이므로 점 P_m의 좌표는 $(1,\ \log m-1)$ 이다.

(사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$의 넓이)

$=\frac{1}{2}(\log 3+\log m-1)=\frac{1}{2}\log\frac{3m}{10}$이므로

자연수 m이 최대일 때 사각형 $P_1P_{10}P_mP_3$의 넓이는 최대이다.

따라서 $m=99$일 때, $\log M=\frac{1}{2}\log\frac{297}{10}$

$\therefore$ $M=\sqrt{\frac{297}{10}}$

따라서 $10M^2=297$

52) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=2^x$, $g(x)=x-[x]$이므로

$g(f(x))=f(x)-[f(x)]=2^x-[2^x]$

i) $x<0$일 때, $0<2^x<1$이므로 $[2^x]=0$

즉 $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x$

ii) $0\le x<\log_2 2$일 때, $1\le 2^x<2$ 이므로 $[2^x]=1$

즉, $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x-1$이므로

$y=g(f(x))$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 시킨 것이다.

iii) $\log_2 2\le x<\log_2 3$일 때, $2\le 2^x<3$이므로 $[2^x]=2$

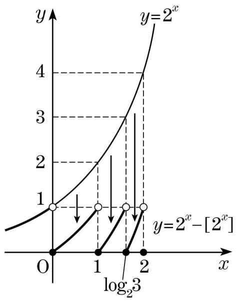
즉, $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x-2$이므로

$y=g(f(x))$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -2만큼 평행이동 시킨 것이다.

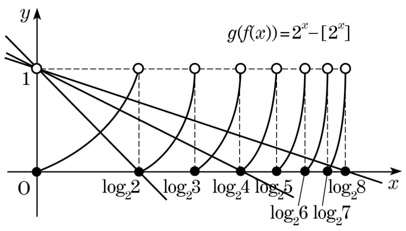
iv) $\log_2 3\le x<\log_2 4$일 때, $3\le 2^x<4$이므로 $[2^x]=3$

즉, $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x-3$이므로

$y=g(f(x))$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 -3만큼 평행이동 시킨 것이다. 다음의 그래프는 각각의 x의 범위에 따라 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하는 과정을 보여주는 것이다.



그러므로 $y=(g\circ f)(x)=2^x-[2^x]$의 그래프와 $n=1,\ 2,\ 3$일 때 $y=-\dfrac{1}{n}x+1$의 그래프를 그리면 그림과 같다.



그림을 참고하여 $n=1,2,3$일 때 $y=-\dfrac{1}{n}x+1$과 $y=2^x-[2^x]$의 그래프가 만나는 점의 개수 a_n을 구하면

$n=1$일 때, $y=-\dfrac{1}{n}x+1$의 x절편이 $1=\log_2 2$이므로 교점의 개수 $a_1=2$

$n=2$일 때, $y=-\dfrac{1}{n}x+1$의 x절편이 $2=\log_2 2^2$이므로 교점의 개수 $a_2=2^2$

$n=3$일 때, $y=-\dfrac{1}{n}x+1$의 x절편이 $3=\log_2 2^3$이므로 교점의 개수 $a_3=2^3$ 따라서 $a_1+a_2+a_3=2+4+8=14$

<참고>

자연수 k에 대해 $\log_2 k\le x<\log_2(k+1)$일 때

$k\le 2^x<k+1$이므로 $[2^x]=k$

즉, $g(f(x))=2^x-[2^x]=2^x-k$이므로 $y=g(f(x))$의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축 방향으로 $-k$만큼 평행이동 시킨 것이다. $n=k$(k는 자연수)일 때, 직선 $y=-\dfrac{1}{n}x+1$의 x절편이 $k=\log_2 2^k$이므로 교점의 개수는 $a_k=2^k$

53) [정답] ⑤

[해설]

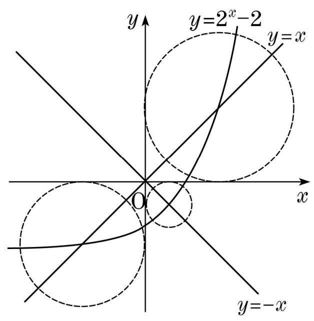
반지름의 길이가 r이고 x축, y축에 모두 접하는 원의 중심의 좌표는 $(r,\ r)$, $(r,\ -r)$, $(-r,\ r)$, $(-r,\ -r)$ 꼴이므로 원의 중심이 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$ 위에 있다.

그러므로 원의 중심이 곡선 $y=2^x+n$ 위에 있고 x축, y축에 모두 접하는 원의 개수는 곡선 $y=2^x+n$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점 중 원점이 아닌 점의 개수와 같다.

(ⅰ) $n=-2$일 때,

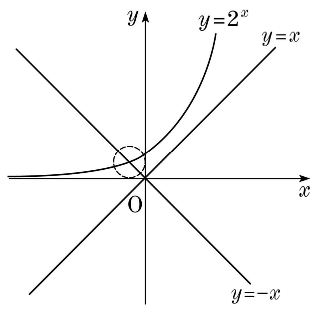
곡선 $y=2^x-2$는 직선 $y=x$와 원점이 아닌 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다.

$\therefore\ f(-2)=2+1=3$



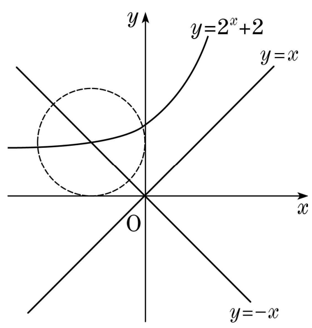
(ⅱ) $n=0$일 때,

곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다. $\therefore\ f(0)=1$



(ⅲ) $n=2$일 때,

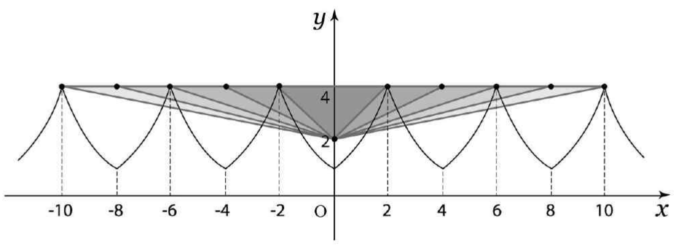
곡선 $y=2^x+2$는 직선 $y=x$와 만나지 않고, 직선 $y=-x$와 원점이 아닌 한 점에서 만난다. $\therefore\ f(2)=1$



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $f(-2)+f(0)+f(2)=3+1+1=5$

54) [정답] ②

[해설]



$a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=8,\ a_4=12,\ a_5=14,\ \cdots$

$a_{2n-1}=6n-4,\ a_{2n}=6n$이므로 $\therefore\ a_{2n-1}+a_{2n}=12n-4$

따라서 $a_9+a_{10}=12\times5-4=56$

55) [정답] 25

[해설]

(i) 조건 (가)에서 $f(2)g(11)=a^2b^{11}=2^{2015}$ 이므로
$a^2b^{11}=2^{2015}$…… ①이다. $a,\ b$는 각각 1보다 큰 자연수이면서 2의 거듭제곱꼴이어야 하므로
$a=2^m,\ b=2^n\,(m,\ n$은 자연수$)$로 두자. $a=2^m,\ b=2^n$을 식 ①에 대입하면
$2m+11n=2015$…… ②이다. 그런데 $2m$은 짝수이므로 $11n$은 홀수이어야 한다. 따라서 n은 홀수이므로
$n=2k-1\,(k$는 자연수$)$ …… ③이다. ③을 ②에 대입하면

$2015=2m+11n=2m+11(2k-1)=2m+22k-11$
이고 정리하면 $m=1013-11k$…… ④이다. m과 k가 자연수이므로 ④식에서 $m=1013-11k\geq1$이고 정리하면

$1\leq k\leq\dfrac{1012}{11}=92$이다.

(ii) 조건(나)에서 $a^2=f(2)<g(4)=b^4$이고
$a=2^m,\ b=2^n\,(m,\ n$은 자연수$)$에서 $2^{2m}<2^{4n}$이므로
$m<2n$…… ⑤이다. ③과 ④를 ⑤에 대입하면

$1013-11k<2(2k-1)\Leftrightarrow k>\dfrac{1015}{15}=67.6\cdots$ 이다.

k가 자연수이므로 $k\geq68$이다.

(i)과 (ii)를 모두 만족하는 자연수 k의 범위는 $68\leq k\leq92$이다. 따라서 순서쌍 (a,b)의 개수는 자연수 k의 개수와 같으므로 $92-68+1=25$이다.

56) [정답] 60

[해설]

조건 (가)에서

$$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\leq x\leq1)\\ 2-2^{x-1} & (1<x\leq2)\end{cases}$$

이고, 조건 (나)에서

(i) $n=1$일 때, $2f(x)=f(x-2)\,(2<x\leq4)$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{2}f(x-2)$이므로

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-3}-\dfrac{1}{2} & (2<x\leq3)\\ 1-2^{x-4} & (3<x\leq4)\end{cases}$$

(ii) $n=2$일 때, $2^2f(x)=f(x-4)\,(4<x\leq6)$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{4}f(x-4)$이므로

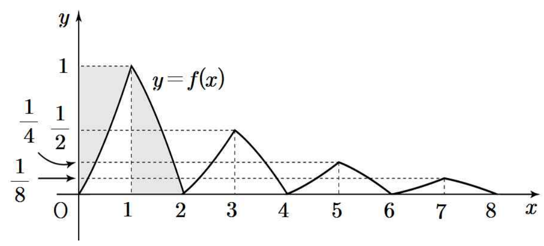
$$f(x)=\begin{cases}2^{x-6}-\dfrac{1}{4} & (4<x\leq5)\\ \dfrac{1}{2}-2^{x-7} & (5<x\leq6)\end{cases}$$

(iii) $n=3$일 때, $2^3f(x)=f(x-6)\,(6<x\leq8)$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{8}f(x-6)$이므로

$$f(x)=\begin{cases}2^{x-9}-\dfrac{1}{8} & (6<x\leq7)\\ \dfrac{1}{4}-2^{x-10} & (7<x\leq8)\end{cases}$$

이다. 따라서 $0\leq x\leq8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$0\leq x\leq1$에서 함수 $y=2^x-1$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프는 $1\leq x\leq2$에서 함수 $y=2-2^{x-1}$의 그래프와 일치한다.

그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $0\leq x\leq2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

같은 방법으로 $2\leq x\leq4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}$,

$4\leq x\leq6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{4}$,

$6\leq x\leq8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인

부분의 넓이는 $\frac{1}{8}$이다.

따라서 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$이므로 $32S=60$이다.

57) [정답] ③

[해설]

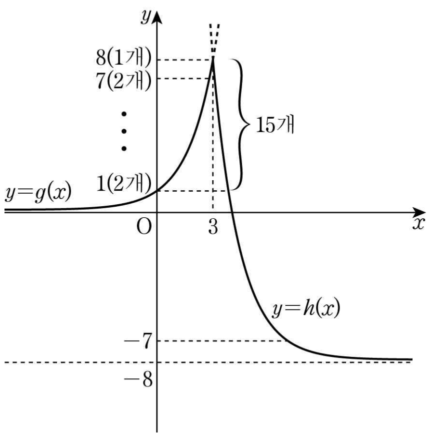
$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하면

곡선 $y=g(x)$의 점근선의 방정식은 $y=0$이고,

곡선 $y=h(x)$의 점근선의 방정식은

$y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이다.

그러므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이므로 $y\le 0$에서 y좌표가 정수인 점의 개수는 8이다.

곡선 $y=h(x)$의 점근선이 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이므로

$-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$은 -8 이상 -7 미만이어야 한다.

즉, $-8\le -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$,

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le 16$, $4<15<4^{-3-a}\le 4^2$,

$1<-3-a\le 2$, $-5\le a<-4$

따라서 구하는 정수 a의 값은 -5

58) [정답] ④

[해설]

점 P, Q, R이 곡선 $y=\log_3(x+2)$ 위에 있다.

$\mathrm{P}(s, \log_3(s+2))$, $\mathrm{Q}(1, 1)$, $\mathrm{R}(t, \log_3(t+2))$

$\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기 $=\frac{\log_3(s+2)}{s}$

$\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기 $=1$

$\overline{\mathrm{OR}}$의 기울기 $=\frac{\log_3(t+2)}{t}$

$\overline{\mathrm{OR}}$의 기울기 $<\overline{\mathrm{OQ}}$의 기울기 $<\overline{\mathrm{OP}}$의 기울기

$\frac{\log_3(t+2)}{t}<1<\frac{\log_3(s+2)}{s}$

$s\log_3(t+2)<st<t\log_3(s+2)$

$(t+2)^s<3^{st}<(s+2)^t$

59) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서 $|\log_3 a-\log_3 b|\le 1$이므로

$-1\le\log_3\frac{a}{b}\le 1$이고 $\frac{1}{3}\le\frac{a}{b}\le 3$이다.

이때, $b>0$이므로 $\frac{1}{3}b\le a\le 3b$이다.

조건 (나)에서 $a=3-b$이므로 $\frac{1}{3}b\le 3-b\le 3b$이고, 이 부등식의 해는 $\frac{3}{4}\le b\le\frac{9}{4}$이다.

한편, $ab=(3-b)b=-\left(b-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}\le b\le\frac{9}{4}\right)$이므로 ab는 $b=\frac{3}{4}$ 또는 $b=\frac{9}{4}$에서 최솟값 $m=\frac{27}{16}$을 가진다.

그러므로 $f(m)=\log_3\frac{27}{16}=3-\log_3 16$이다.

따라서 $k=16$이다.

60) [정답] ②

[해설]

$$f(x)=\begin{cases}2 & (x<-2,\ x>2)\\ -x & (-2\le x<0)\\ x & (0<x\le 2)\end{cases}$$

$$\log_2 f(x)=\begin{cases}1 & (x<-2,\ x>2)\\ \log_2(-x) & (-2\le x<0)\\ \log_2 x & (0<x\le 2)\end{cases}$$

61) [정답] ⑤

[해설]

$2^x=t$라 하면 $x=\log_2 t$(진수조건에서 $x>0$이므로 $t>1$이다.)

$f(t)=-\log_3(\log_2 t)=\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 t)$

$\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 t)=0$이 되는 값은 $t=2$이므로

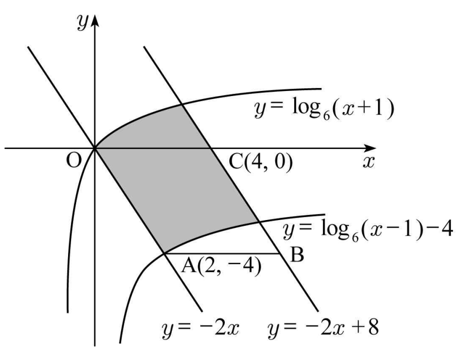
x축과의 교점이 (2, 0)이고 $\log_2 t$가 증가하므로

$0<$(밑)<1인 로그함수 그래프이다.

62) [정답] 16

[해설]

주어진 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 그림과 같이 평행사변형 OABC의 넓이와 같다.



$y=\log_6(x-1)-4$의 그래프는 $y=\log_6(x+1)$의 그래프를 x축, y축의 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시킨 것이다. 원점을 x축, y축의 방향으로 각각 2, -4만큼 평행이동시키면 $(2, -4)$이고, 점 $(2, -4)$는 직선 $y=-2x$ 위의 점이다.

따라서 $y=\log_6(x-1)-4$의 그래프와 직선 $y=-2x$의 교점 A의 좌표는 A$(2, -4)$이다. 이때, 점 C의 좌표는 $(4, 0)$이므로 $\overline{OC}=4$이고, 평행사변형 OABC의 넓이는 $4\times4=16$이다.

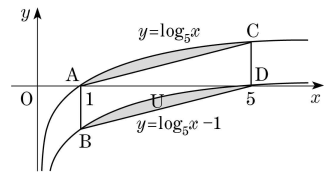
63) [정답] ②

[해설]

$\log_5\frac{x}{5}=\log_5 x-\log_5 5=\log_5 x-1$이므로

주어진 함수 $y=\log_5\frac{x}{5}$는 $y=\log_5 x-1$이다.

이 함수의 그래프는 $y=\log_5 x$를 y축 방향으로 -1만큼 평행이동 시킨 것이다.



로그함수 $y=\log_5 x-1$의 그래프와 선분 BD로 둘러싸인 부분의 넓이를 U라 하자. 그림에서와 같이 선분 BD를 연결하면 넓이 T는 평행사변형 ABDC에서 U를 뺀 것이다.

즉 $T=2\triangle ADC-U\cdots$ ㉠

그런데 로그함수 $y=\log_5 x$의 그래프와 선분 AC로 둘러싸인 부분의 넓이는 로그함수 $y=\log_5 x-1$의 그래프와 선분 BD로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 U이다.

즉 $S=\triangle ADC+U\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 계산하면 $S+T=3\triangle ADC$

삼각형 ADC는 밑변이 4, 높이가 1인 직각삼각형이므로

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times4\times1=2$ 따라서 $S+T=3\times2=6$

<다른 풀이>

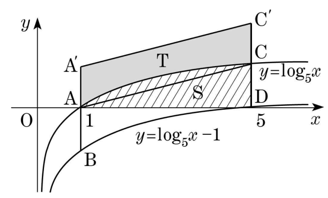
$\log_5\frac{x}{5}=\log_5 x-\log_5 5=\log_5 x-1$이므로

주어진 함수 $y=\log_5\frac{x}{5}$는 $y=\log_5 x-1$이다.

그러므로 $y=\log_5\frac{x}{5}$의 그래프를 y축 방향으로 1만큼 평행이동 시키면 $y=\log_5 x$의 그래프와 일치한다.

점 A, 점 C를 y축 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점을 각각 A′, C′이라 하면 넓이 T는 $y=\log_5 x$의 그래프와 세 선분 AA′, A′C′, C′C로 둘러싸인 넓이와 같다.

그러므로 넓이의 합 $S+T$는 사다리꼴 A′ADC′의 넓이와 같다. $S+T=\frac{1}{2}(\overline{A'A}+\overline{C'D})\overline{AD}=\frac{1}{2}\times(1+2)\times4=6$



64) [정답] ①

[해설]

무한등비급수이고, 모두 닮음도형이며, 초항 $=1$이기 때문에 ($\because$정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이=1) 공비만 구해주면 된다.
주어진 무한수열의 공비는 첫 번째 정사각형의 한변의 길이만 구하면 구할 수 있다.

(ⅰ) <그림 1>에서 두 번째 정사각형의 한변의 길이를 a라 하면 A_2C_2는 $\sqrt{2}a$이다. 그런데 이 길이는 $\overline{HH'}-\left(\overline{A_2H'}+\overline{C_2H}\right)=1-2\overline{A_2H'}$로 구할 수 있다.

이때, $\overline{A_2H'}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$($\because$삼각형 A_2B_1H에서

$\overline{A_2B_1}=1$, $\overline{B_1H}=\dfrac{1}{2}$인 직각삼각형)이므로

$2\overline{A_2H'}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{HH'}=1-(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1=\sqrt{2}a\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$

한편 이 무한등비급수는 넓이의 합을 묻고 있으므로 공비는 넓이비가 되고, 이는 곧 닮음비 (=길이비)의 제곱이 된다.

닮음비 $=\dfrac{a}{1}=a$이므로 공비는 a^2이 된다.

$\therefore\ a^2=\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=2-\sqrt{3}$

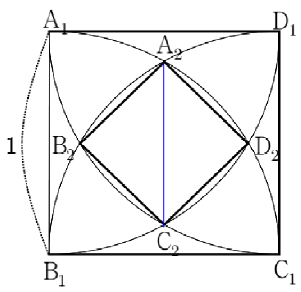
$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

(ⅱ) <그림 2>에서 빨간색 삼각형을 관찰하면

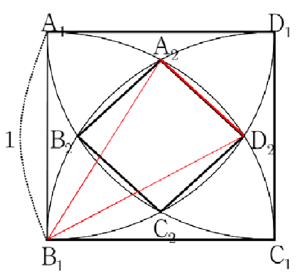
$\overline{A_2B_1}=\overline{D_2B_1}=1$, $\angle A_2B_1D_2=\dfrac{\pi}{6}$이므로 주어진 삼각형에서 코사인법칙을 쓰면

$\overline{A_2D_2}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=2-\sqrt{3}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$



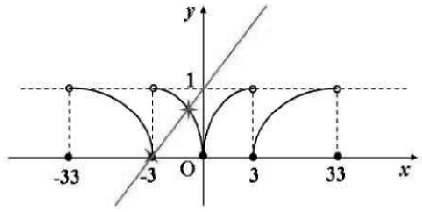
<그림 1>



<그림 2>

65) [정답] ②

[해설]
$3|x|+1\ge1$이므로 $\log(3|x|+1)\ge0$이다.
$0\le\log(3|x|+1)<1\Rightarrow1\le3|x|+1<10,\ 0\le|x|<3$
$1\le\log(3|x|+1)<2\Rightarrow1\le3|x|+1<10,\ 3\le|x|<33$
⋮
의 소수부분을 그래프로 나타내면 그림과 같다.



그러므로 $y=mx+1$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 m의 최댓값은 $(-3,0)$을 지날 때이므로

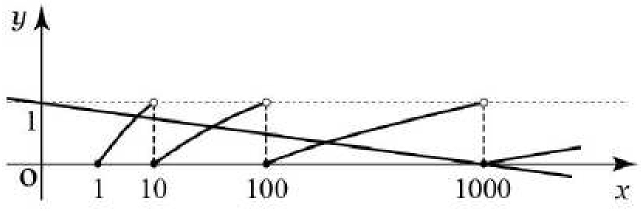
$m=\dfrac{1}{3}$이다.

66) [정답] ⑤

[해설]
점 E의 좌표를 (a,b)라 하면 점 F의 좌표는 $(a,2^a)$이고
$2^a=16$에서
$\therefore\ a=4$
또 점 E는 곡선 $y=\log_2 x$위의 점이므로
$b=\log_2 4=2$
두 점 $A(2^n,0)$, $D(2^n,n)$을 이은 선분을 $2:3$으로 내분하는 점은 $\left(2^n,\dfrac{2}{5}n\right)$이고
이 점의 y좌표가 점 E의 y좌표와 같으므로
$\dfrac{2}{5}n=2\qquad\therefore\ n=5$
따라서 두 점 $D(32,5)$, $F(4,16)$을 지나는 직선 DF의 기울기는
$\dfrac{16-5}{4-32}=-\dfrac{11}{28}$

67) [정답] ⑤

[해설]
ㄱ. $f(50)=\log50-[\log50]=\log5$
$f(5)=\log5-[\log5]=\log5$ (참)
ㄴ. $f(a)+f(b)=1$ 이고
$\log a=[\log a]+f(a)$, $\log b=[\log b]+f(b)$이므로
$\log ab=[\log a]+[\log b]+1$는 정수 $\therefore\ f(ab)=0$ (참)
ㄷ. $y=f(x)$와 $y=-\dfrac{1}{10^3}x+1$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore$ 교점은 모두 4개다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

68) [정답] ③

[해설]

$g(x)=\log_b(ax-1)$의 점근선은 $x=\dfrac{1}{a}$

$y=f(x)$와 x축과의 교점이 $y=g(x)$의 점근선 위에 존재하므로 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=0$을 만족한다.

$\log_a\left(\dfrac{b}{a}-1\right)=0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}-1=1$ 에서 $b=2a$

조건에 의하여 $0<a<1$이고 $b>1$이므로 $2a>1$

$\therefore \dfrac{1}{2}<a<1 \ \therefore b=2a\left(\dfrac{1}{2}<a<1\right)$

69) [정답] ⑤

[해설]

점 A의 x좌표를 a라 하면 A의 좌표는 $(a,\ 2^{a-1}+1)$

점 A와 B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

점 B의 좌표는 $(2^{a-1}+1,\ a)$

점 B가 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$a=\log_2(2^{a-1}+2)$

$2^a=2^{a-1}+2$

$2^{a-1}=2$

$\therefore a=2$

점 A의 y좌표는 $2^{2-1}+1=3$

직선 AC가 x축과 평행하므로 점 C의 y좌표는 3이다.

$\log_2(x+1)=3$에서 $x=2^3-1=7$

$\therefore$ A$(2,\ 3)$, B$(3,\ 2)$, C$(7,\ 3)$

$\therefore p=\dfrac{2+3+7}{3}=4,\ q=\dfrac{3+2+3}{3}=\dfrac{8}{3}$

$\therefore p+q=\dfrac{20}{3}$

70) [정답] 88

[해설]

직선 $x=2$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 y좌표가 p이므로 $p=k^2\log 2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 Q의 y좌표가 p이므로

$k^2\log 2=k\log a$를 정리하면 $a=2^k$

직선 $x=2$와 곡선 $y=h(x)$의 만나는 점의 y좌표가 q이므로 $q=4k^2\log 2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 R의 y좌표가 q이므로

$4k^2\log 2=k^2\log b$를 정리하면 $b=2^4$

세 점 P$(2,\ 0)$, Q$(2^k,\ k^2\log 2)$, R$(2^4,\ 4k^2\log 2)$가 한 직선 위에 있으므로

$\dfrac{k^2\log 2}{2^k-2}=\dfrac{4k^2\log 2}{14}$를 정리하면 $2^k=\dfrac{11}{2}$

$a=\dfrac{11}{2},\ b=16$

따라서 $ab=88$

71) [정답] **34**

[해설]

곡선 $y=\log_2 x$를 원점에 대하여 대칭이동한 곡선은

$y=-\log_2(-x)$이고, 이것을 다시 x축의 방향으로 $\dfrac{5}{2}$만큼 평행이동한 곡선은

$$y=-\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)\right\}=-\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)$$

따라서 $f(x)=-\log_2\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)$이다.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 두 실수 $\alpha,\ \beta$는 방정식 $\log_2 x=-\log_2\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)$의 해다.

따라서 $\log_2 x=-\log_2\left(-x+\dfrac{5}{2}\right)$

$\log_2 x+\log_2\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0$, $\log_2\left\{x\left(-x+\frac{5}{2}\right)\right\}=0$,

$x\left(-x+\frac{5}{2}\right)=1$, $2x^2-5x+2=0$

$(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=2$

따라서 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $\mathrm{B}(2, 1)$이고, 직선 AB의 기울기는

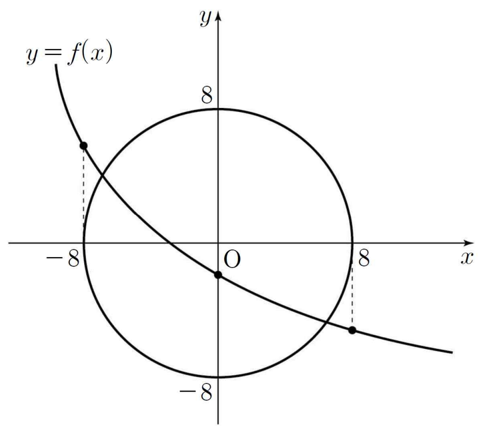
$\frac{q}{p}=\frac{1-(-1)}{2-\frac{1}{2}}=\frac{4}{3}$이다.

따라서 $10p+q=34$이다.

72) [정답] 24

[해설]

x의 값이 증가할 때 $f(x)$의 값은 감소하므로 조건 (가)와 (나)를 만족하기 위해서는 두 교점이 제 2사분면과 제 4사분면에 각각 한 개씩 존재하야 한다.



따라서 $-8<f(0)<8$, $f(-8)>0$, $f(8)<0$

(i) $-8<f(0)<8$일 때,

$f(0)=2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2$이므로

$-8<2\log_{\frac{1}{2}}(-7+k)+2<8$에서 $\frac{57}{8}<k<39$

(ii) $f(-8)>0$일 때,

$f(-8)=2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2$이므로

$2\log_{\frac{1}{2}}(-15+k)+2>0$에서 $k<17$

(iii) $f(8)<0$일 때,

$f(8)=2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2$이므로 $2\log_{\frac{1}{2}}(1+k)+2<0$에서

$k>1$

(i), (ii), (iii)에 의해서 $\frac{57}{8}<k<17$이다.

따라서 k의 최댓값 $M=16$, 최솟값 $m=8$이므로

$M+m=24$

73) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\log_2|kx_1|=\log_2(x_1+4)$에서 $x_1<0$이므로

$-kx_1=x_1+4$, $x_1=\frac{-4}{k+1}$

$\log_2|kx_2|=\log_2(x_2+4)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=x_2+4$, $x_2=\frac{4}{k-1}$

$x_2=-2x_1$에서

$\frac{4}{k-1}=\frac{8}{k+1}$, $k+1=2k-2$, $k=3$ (참)

ㄴ. $\log_2|kx_2|=\log_2(-x_2+m)$에서 $x_2>0$이므로

$kx_2=-x_2+m$,

$m=(k+1)x_2=\frac{4(k+1)}{k-1}$

$\log_2|kx_3|=\log_2(-x_3+m)$에서 $x_3<0$이므로

$-kx_3=-x_3+m$,

$x_3=\frac{-m}{k-1}=\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}$

그러므로

$x_1x_3=\frac{-4}{k+1}\times\frac{-4(k+1)}{(k-1)^2}=\left(\frac{4}{k-1}\right)^2={x_2}^2$ (참)

ㄷ. ${x_2}^2=x_1x_3$에서 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}$

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{-k-1}{k-1}=-1-\frac{2}{k-1}<-1$

$\frac{x_2}{x_1}=r\,(r<-1)$이라 하면 $x_2=x_1r$, $x_3=x_1r^2$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면 두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$

$=\frac{\log_2|kx_2|-\log_2|kx_1|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2|kx_3|-\log_2|kx_1|}{x_1(r^2-1)}$

$=\frac{\log_2\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}{x_1(r-1)}+\frac{\log_2\left|\frac{x_3}{x_1}\right|}{x_1(r^2-1)}$

$$= \frac{\log_2(-r)}{x_1(r-1)} + \frac{2\log_2(-r)}{x_1(r^2-1)} = 0$$

에서 $1 + \frac{2}{r+1} = 0$, $r = -3$

$x_2 = x_1 r$에서

$\frac{4}{k-1} = \frac{12}{k+1}$, $k+1 = 3k-3$, $k=2$이고,

$m = \frac{4(k+1)}{k-1} = 12$이므로 $m + k^2 = 16$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

74) [정답] ②

[해설]

$y = \log_n x$, $y = -\log_n(x+3)+1$을 연립하면

$$\log_n x = -\log_n(x+3)+1,\ \log_n x + \log_n(x+3) = 1$$

$$\log_n x(x+3) = 1$$

즉, $x(x+3) = n$이므로 $x^2+3x-n=0$

$f(x) = x^2+3x-n$이라 하면 문제 조건에서 함수 $y=f(x)$의 근이 1보다 크고 2보다 작은 근이 존재한다는 의미이므로 $f(1)<0$, $f(2)>0$이어야 한다.

따라서 $f(1) = 4-n<0$, $f(2) = 4+6-n>0$

즉, $n>4$, $n<10$이므로 만족하는 n의 범위는 $4<n<10$

따라서 만족하는 자연수 n의 값은 $n = 5$, 6, 7, 8, 9

구하고자 하는 n의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$

75) [정답] 15

[해설]

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2-a}{2-1}, \frac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right)$이고

$$\begin{aligned} 2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b &= \log_8\sqrt{27}-\log_4 b \\ &= \log_4 3 - \log_4 b \\ &= \log_4\frac{3}{b} \end{aligned}$$

이므로 $\left(\frac{2-a}{2-1}, \frac{2\log_8\sqrt[4]{27}-\log_4 b}{2-1}\right) = \left(2-a, \log_4\frac{3}{b}\right)$이다.

이 점이 곡선 $y = -\log_4(3-x)$위에 있으므로

$$\log_4\frac{3}{b} = -\log_4(a+1) = \log_4\frac{1}{a+1}$$

따라서 $b = 3(a+1)$이다.

집합 $\{n \mid b < 2^n \times a \le 32b,\ n$은 정수$\}$의 원소의 개수는 5이다.

$\{n \mid b < 2^n \times a \le 32b,\ n$은 정수$\}$

$= \{m,\ m+1,\ m+2,\ m+3,\ m+4\}$($m$은 정수)

라 하면 $m+(m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4) = 25$이므로 $m=3$이다.

그러므로 $2 \le \log_2\frac{b}{a} < 3$이다.

$4 \le \frac{b}{a} < 8$이고 $b = 3(a+1)$이므로 $\frac{3}{5} < a \le 3$이다.

그러므로 $a=1$, $b=6$ 또는 $a=2$, $b=9$ 또는 $a=3$, $b=12$이다.

따라서 $a+b$의 최댓값은 15

76) [정답] ④

[해설]

$f(x) = |\log_2(x-k)|$이므로

$|\log_2(x-k)| = |\log_2(-x+8)|$ …… ㉠

(ⅰ) $\log_2(x-k) = \log_2(-x+8)$일 때,

$x-k = -x+8$

$\therefore x = \frac{k+8}{2}$

(ⅱ) $\log_2(x-k) = -\log_2(-x+8)$일 때,

$\log_2(x-k)(-x+8) = 0$

$-x^2+(k+8)x-8k = 1$

$x^2-(k+8)x+8k-1 = 0$ …… ㉡

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y = |\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나기 위해서는 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉡이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 각각 α, β라 하면 근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta = k+8$

(ⅰ), (ⅱ)에서 세 실근의 합이 18을 만족해야 하므로

$\frac{k+8}{2}+(k+8) = 18$, $k+8=12$

$\therefore k=4$

[다른 풀이]

$f(x)=|\log_2(x-k)|$이므로 $y=|\log_2(-x+8)|$과

$x=\dfrac{k+8}{2}$에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=|\log_2(-x+8)|$이 세 점에서 만나므로 교점의 x좌표를 각각 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$라 하면

$\beta=\dfrac{k+8}{2}$, $\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=k+8$

을 만족한다.

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{3}{2}(k+8)=18$, $k+8=12$

$\therefore k=4$