출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	④	23	②	23	④	*	*
2	②	13	④	24	③	24	②	*	*
3	⑤	14	③	25	④	25	③	*	*
4	①	15	③	26	①	26	③	*	*
5	②	16	2	27	⑤	27	②	*	*
6	⑤	17	35	28	④	28	②	*	*
7	③	18	130	29	92	29	11	*	*
8	①	19	24	30	246	30	74	*	*
9	③	20	13						
10	③	21	132						
11	①	22	32						

위 시험지는 수험생들이 '2024학년도 고3 6월 모의평가'를 준비하는데 있어 도움을 주고자 하는 목적으로 제작되었습니다. 모든 문항의 저작권은 '띵수학 연구실'에 있으며 연구실의 허락 없이 문항을 상업적으로 이용하는 행위, 문제를 수정하거나 편집하여 2차 창작물로 만드는 행위 등을 금합니다.

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우
math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

해설강의는 띵수학 유튜브에서 찾아보실 수 있습니다!
https://www.youtube.com/c/띵수학mathdding/playlists

2024학년도 6월 공통 전 문항 해설 강의

공통과목

1. 정답) ④ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\left(\frac{1}{2}\times 2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}+1} = \left(2^{\sqrt{2}-1}\right)^{\sqrt{2}+1} = 2$

2. 정답) ② [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x}-2x}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-2x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{-3x^2+3x}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3x}+2x\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{-3x}{\sqrt{x^2+3x}+2x} = -\frac{3}{4}$

3. 정답) ⑤ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $a_n = a\times r^{n-1}$이라 둘 때,

$a_2 = ar = 8$, $\frac{a_3\times a_6}{a_5} = \frac{ar^2\times ar^5}{ar^4} = ar^3 = 18$에서

$r^2 = \frac{9}{4}$이므로 $r=\frac{3}{2}>0$이고, $a=\frac{16}{3}=a_1$이다.

4. 정답) ① [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $g(x)=f(x)-x$의 도함수는 $g'(x)=f'(x)-1$이다.

$g(2)=4$에서 $f(2)=6$, $g'(2)=-1$에서 $f'(2)=0$이다.

$f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수고 $f'(2)=0$이므로

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 6을 가진다.

5. 정답) ② [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=\frac{3}{5}$에서 $\sin\theta=-\frac{3}{5}$이고

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{4}{5}>0$이므로

$\tan\theta=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$이다.

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

6. 정답) ⑤ [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 \{f(t)-t\}dt = a + \int_0^1 f(t)dt$ 에서 $-\int_0^1 t\,dt = a$이고

$-\int_0^1 t\,dt = -\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2} = a$이다.

주어진 식의 양변을 미분하면 $f(x)-x=a$이고

$f(x)=x-\frac{1}{2}$에서 $f(4)=\frac{7}{2}$이다.

7. 정답) ③ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : 주어진 식에서 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}$를 좌변으로 이항하면

$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{k+1}=n+1$이다.

$n=1$일 때, $\frac{a_1}{2}=2$에서 $a_1=4$이다.

$n\geq 2$일 때, $\sum_{k=1}^{n}\frac{ka_k}{k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{ka_k}{k+1}=\frac{na_n}{n+1}=1$이고

$a_n=\frac{n+1}{n}$이다.

$\sum_{k=1}^{15}\log_2 a_k = \log_2 a_1 + \sum_{k=2}^{15}\log_2 a_k$

$=\log_2\left(4\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{16}{15}\right)=\log_2 32=5$

8. 정답) ① [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : 함수 $g(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0+}g(x)=g(0)$에서 $f(0)=1$이고

$\lim_{x\to 2-}g(x)=\lim_{x\to 2+}g(x)=g(2)$에서 $f(2)=-1$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 둘 때, $f(0)=1$, $f(2)=-1$에서

$c=1$, $b=-2a-1$이고 $f(x)=ax^2-(2a+1)x+1$이다.

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $a>0$이고, 최솟값을

가지는 x는 2 이상이어야 한다.

즉, $\frac{2a+1}{2a}\geq 2$, $a\leq\frac{1}{2}$이고, $f(3)=3a-2\leq-\frac{1}{2}$이다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이면

$a<0$에서 $f(3)=3a-2<-2$이므로

$a=\frac{1}{2}$일 때, $f(3)$의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$이다.

9. 정답) ③ [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : (가)에서 곡선 $y=\log_a(x+1)$과 직선 $y=4x$는 모두

원점을 지나므로 만나는 두 점 A, B 중에 원점이 존재한다.

이때, 점 B가 원점이면 조건 (나)에 의해 곡선 $y=\log_a x+4$가

원점을 지나야 하는데 함수 $y=\log_a x+4$의 정의역은 양의 실수

전체의 집합이므로 점 B는 원점이 아니다.

따라서 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(k,4k)$ $(k\neq 0, k>-1)$이라 할 수 있다.

(나)에서 곡선 $y=\log_a x+4$는 곡선 $y=\log_a(x+1)$을 x축의

방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 곡선이고,

직선 $y=4x$는 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼

평행이동하여도 직선 $y=4x$이므로

두 점 A, B를 각각 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 4만큼

평행이동한 점 $\mathrm{A}'(1,4)$, $\mathrm{B}'(k+1,4k+4)$에 대하여

곡선 $y=\log_a x+4$와 직선 $y=4x$는 두 점 A′, B′에서 만난다.

(나)에 의해 두 점 $\mathrm{A}'(1,4)$, $\mathrm{B}(k,4k)$가 같은 점이고

두 점 $\mathrm{B}'(k+1,4k+4)$, C가 같은 점이다.

즉, $k=1$이고 곡선 $y=\log_a(x+1)$이 점 $\mathrm{B}(1,4)$를 지나므로

$4=\log_a 2$, $a=2^{\frac{1}{4}}$이다.

10. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분]

해설 : $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^3-4x^2-3x+k=0$이고

조건을 만족시키는 정수 k는

방정식 $x^3-4x^2-3x+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을

가지도록 하는 정수 k이다.

$(x^3-4x^2-3x+k)'=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$

에서 함수 $y=x^3-4x^2-3x+k$는

$x=-\frac{1}{3}$에서 극댓값 $\frac{14}{27}+k$, $x=3$에서 극솟값 $-18+k$를

가진다.

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

방정식 $x^3-4x^2-3x+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $f(0)=k>0$, $f(3)=-18+k<0$이어야하므로

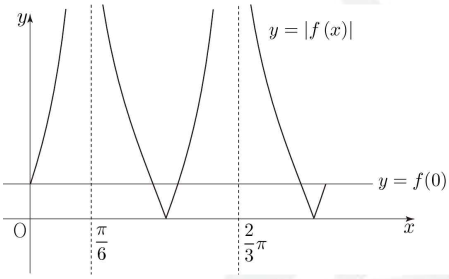
$0<k<18$이다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 17이다.

11. 정답) ① [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $f(0)$의 부호에 따라 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형이 달라진다.

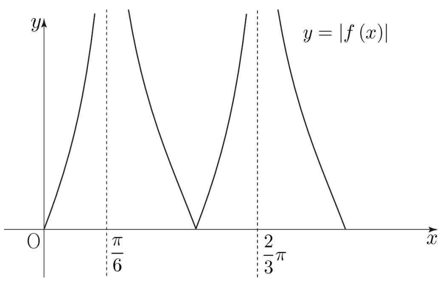
(1) $f(0)>0$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은



와 같다.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 실수 t가 존재하지 않으므로 $g(t)=3$을 만족하는 실수 t가 존재함에 모순이다.

(2) $f(0)=0$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은

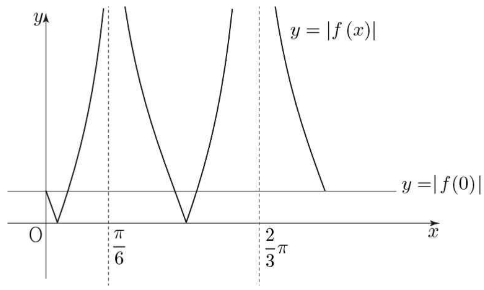


와 같다.

$t=0$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3이므로 $g(0)=3$이다.

즉, $f(0)=a\tan\frac{\pi}{6}-2=\frac{a}{\sqrt{3}}-2=0$, $a=2\sqrt{3}$이다.

(3) $f(0)<0$일 때, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형은



와 같다.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 실수 t가 존재하지 않으므로 $g(t)=3$을 만족하는 실수 t가 존재함에 모순이다.

(1), (2), (3)에 의해 $f(x)=2\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-2$이고

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{2}{3}\pi-2=-8$이다.

12. 정답) ④ [수학Ⅱ - 함수의 극한과 연속]

해설 : $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=2$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=0$에서 $g(0)\neq0$이면 $f(0)\neq0$이고 이때, 두 극한값이 같아야 하므로 모순이다.

즉, $f(0)=0$, $g(0)=0$이고 가능한 경우는 $f(x)$와 $g(x)$가 모두

(1) x를 인수로 가지고 x^2을 인수로 가지지 않거나,

(2) x^2을 인수로 가져야 한다.

(1) $f(x)$와 $g(x)$가 모두 x를 인수로 가지고 x^2을 인수로 가지지 않는 경우

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=dx^2+ex$라 두자.

(a, c, d, e는 0이 아닌 실수)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx^2+cx}{dx^2+ex}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}=\frac{c}{e}=2$$

에서 $c=2e$이다.

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=n\ (n=0,\ 2)\text{에서}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^3+bx^2+(c-1)x}{dx^2+(e-1)x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx+(c-1)}{dx+(e-1)}=0$$

이 문제지에 관한 저작권은 땅수학 연구실에 있습니다.

이므로, $c=1$, $e=\dfrac{1}{2}$이다.

(부가설명 : $e=1$인 경우 극한식이 발산하므로 $e\neq 1$)

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx}{dx-\frac{1}{2}}=2$에서

$f(2)-2=0$이므로 $g(2)-2=0$이고

$x\to 2$일 때, $ax^2+bx\to 0$, $dx-\dfrac{1}{2}\to 0$이다.

즉, $d=\dfrac{1}{4}$, $b=-2a$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-2ax}{\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 2}\frac{ax}{\frac{1}{4}}=8a=2$에서

$a=\dfrac{1}{4}$, $b=-\dfrac{1}{2}$이다.

즉, $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$, $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x$이다.

(2) $f(x)$와 $g(x)$가 모두 x^2을 인수로 가지는 경우

$f(x)=ax^3+bx^2$, $g(x)=cx^2$이라 두자. (a, c는 0이 아닌 실수)

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx^2}{cx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{c}=\frac{b}{c}=2$

에서 $b=2c$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to n}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=n\ (n=0,\ 2)$에서

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{g(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^3+bx^2-x}{cx^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx-1}{cx-1}=1\neq 0$

이므로 모순이다.

(1), (2)에 의해

$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x$, $g(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x$이고

$f(4)+g(4)=12+6=18$이다.

13. 정답) ④ [수학Ⅰ - 삼각함수]

해설 : $\angle \mathrm{ODC}=\dfrac{\pi}{6}$에서 $\angle \mathrm{OCD}=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle \mathrm{COD}=\dfrac{2\pi}{3}$이다.

원주각의 성질에 의해 $\angle \mathrm{CBD}=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{COD}=\dfrac{\pi}{3}$이고

사인법칙에 의해 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=6$, $\overline{\mathrm{CD}}=3\sqrt{3}$이다.

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{OD}}-\overline{\mathrm{OE}}=2$이고, 삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{CE}}^2=(3\sqrt{3})^2+2^2-2\times 3\sqrt{3}\times 2\times\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{13}$이다.

삼각형 OCE에서 코사인법칙에 의해

$\cos(\angle \mathrm{OCE})=\dfrac{(\sqrt{13})^2+3^2-1}{2\times\sqrt{13}\times 3}=\dfrac{7}{2\sqrt{13}}$이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos(\angle \mathrm{OBC})=6\times\cos(\angle \mathrm{OCE})=\dfrac{21\sqrt{13}}{13}$에서

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{21\sqrt{13}}{13}-\sqrt{13}=\dfrac{8\sqrt{13}}{13}$이다.

14. 정답) ③ [수학Ⅱ - 미분 + 적분]

해설 : 주어진 식에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이다.

주어진 식의 우변이 미분가능하므로 좌변도 미분가능해야한다.

이에 따라 $x=1$의 좌우에서

$\displaystyle\lim_{x\to 1-}\frac{|x-1|f(x)-0}{x-1}=-f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to 1+}\frac{|x-1|f(x)-0}{x-1}=f(1)$

이므로 $f(1)=0$이다.

$f(0)=0$, $f(1)=0$에서 인수정리에 의해 양수 a에 대하여

$f(x)=ax(x-1)$이라 둘 수 있다.

이에 따라 주어진 식은

$ax|x-1|(x-1)=\displaystyle\int_0^x\{g(t)+2\}dt$이고

$\displaystyle\int_0^x\{g(t)+2\}dt=\begin{cases}ax(x-1)^2 & (x\geq 1)\\ -ax(x-1)^2 & (x<1)\end{cases}$이다.

ㄱ. 함수 $\displaystyle\int_0^x\{g(t)+2\}dt$는 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로

$\displaystyle\int_0^x\{g(t)+2\}dt=\begin{cases}ax(x-1)^2 & (x\geq 1)\\ -ax(x-1)^2 & (x<1)\end{cases}$

의 양변을 미분하면

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

$$g(x)+2=\begin{cases} a(3x-1)(x-1) & (x \ge 1) \\ -a(3x-1)(x-1) & (x<1) \end{cases}$$ 이고,

$x=1$에서 $g(1)+2=0$이므로 $g(1)=-2$이다. (참)

ㄴ. $g(x)+2=\begin{cases} a(3x-1)(x-1) & (x \ge 1) \\ -a(3x-1)(x-1) & (x<1) \end{cases}$ 에서

$x \ge 1$에서 방정식 $f(x)=g(x)+2$의 실근은

$ax(x-1)=a(x-1)(3x-1) \Leftrightarrow a(x-1)(2x-1)=0$이고

$x=1$이다.

$x<1$에서 방정식 $f(x)=g(x)+2$의 실근은

$ax(x-1)=-a(x-1)(3x-1) \Leftrightarrow a(x-1)(4x-1)=0$이고

$x=\frac{1}{4}$이다.

즉, 방정식 $f(x)=g(x)+2$의 모든 실근의 합은 $\frac{5}{4}$이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $\int_2^x g(t)dt$가 오직 하나의 극값을 가지므로 $g(x)$가

부호변화를 가지는 x가 하나뿐이어야 한다.

$$g(x)=\begin{cases} a(3x^2-4x+1)-2 & (x \ge 1) \\ -a(3x^2-4x+1)-2 & (x<1) \end{cases}$$ 에서 $g(1)=-2$이고

$a>0$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는

$x \ge 1$에서 항상 x축과 만나고 부호변화를 가진다.

따라서 $x<1$에서 x축과 한 점에서 만나거나, 만나지 않아야

한다.

이때, 이차함수 $y=-a(3x^2-4x+1)-2$는 $x=\frac{2}{3}$에서

최댓값을 가지므로 방정식 $-a(3x^2-4x+1)-2=0$이

중근을 가지거나 실근을 가지지 않아야 하고,

$3ax^2+4ax+a+2=0$에서 판별식에 의해

$\frac{D}{4}=4a^2-3a^2-6a=a(a-6)\le 0$, $a \le 6$이다. $(a>0)$

$f(2)=2a \le 12$이므로 $f(2)$의 최댓값은 12이다. (참)

15. 정답) ③ [수학Ⅰ - 수열]

해설 : $a_2=k$라 둘 때,

$a_2>a_1$이므로 $a_3=a_2-a_1=k-1$

$a_3<a_2$이므로 $a_4=a_3+a_2=2k-1$

$a_4>a_3$이므로 $a_5=a_4-a_3=k$

$a_5<a_4$이므로 $a_6=a_5+a_4=3k-1$

$a_6>a_5$이므로 $a_7=a_6-a_5=a_4=2k-1$

$a_7<a_6$이므로 $a_8=a_7+a_6=5k-2$

$a_8>a_7$이므로 $a_9=a_8-a_7=a_6=3k-1$

⋮

에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n}=a_{2n+3}$, $a_{2n}+a_{2n+2}=a_{2n+4}$임을 알 수 있다.

$\sum_{n=1}^{6}(a_{2n}-a_{2n-1})$

$=-a_1-a_3+(a_2-a_5)+(a_4-a_7)+(a_6-a_9)+(a_8-a_{11})+a_{10}+a_{12}$

$=-a_1-a_3+a_{10}+a_{12}$

$=-1-k+1+(a_6+a_8)+(a_8+a_{10})$

$=-k+8k-3+13k-5$

$=20k-8=20$

에서 $k=\frac{7}{5}$이고, $a_3=k-1=\frac{2}{5}$이다.

16. 정답) 2 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_2(x-1)+1=\log_4(x+2)$에서

$\log_4(4x^2-8x+4)=\log_4(x+2)$이고

$4x^2-8x+4=x+2 \Leftrightarrow (4x-1)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}, x=2$

이다. 진수조건에 의해 $x>1$이므로 $x=2$이다.

17. 정답) 35 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : $f'(x)=8x^3-4x+5$의 양변을 부정적분하면

$f(x)=2x^4-2x^2+5x+C$이다. (C는 적분상수)

$f(1)=5+C=6$에서 $C=1$이고,

$f(x)=2x^4-2x^2+5x+1$, $f(2)=35$이다.

18. 정답) 130 [수학Ⅰ - 수열]

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

해설 : $\sum_{k=1}^{10}(a_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}1=\sum_{k=1}^{10}a_k+10=35$

에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=25$이다.

$$\sum_{k=1}^{15}\left(a_k-\frac{k}{4}\right)=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{15}\frac{k}{4}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}a_k-\frac{1}{4}\times\frac{15\times16}{2}=\sum_{k=1}^{15}a_k-30=60$$

에서 $\sum_{k=1}^{15}a_k=90$이다.

$$\sum_{k=11}^{15}(a_k+k)=\sum_{k=11}^{15}a_k+\sum_{k=11}^{15}k$$
$$=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k+\frac{5(11+15)}{2}=90-25+65=130$$

19. 정답) 24 [수학Ⅱ - 미분]

해설 : 함수 $f(x)$의 도함수는 $f'(x)=4x^3+3ax^2+b$이다.

두 점 $(0,\ f(0))$, $(3,\ f(3))$에서의 접선이 평행하므로

$f'(0)=f'(3)$이어야 하고,

$f'(0)=b$, $f'(3)=108+27a+b$에서 $a=-4$이다.

두 점 $(0,\ f(0))$, $(3,\ f(3))$에서의 접선의 방정식은 각각

$y=f'(0)(x-0)+f(0) \Leftrightarrow y=bx$

$y=f'(3)(x-3)+f(3) \Leftrightarrow y=bx-27$

이고, 두 접선 사이의 거리는 $\frac{|-27|}{\sqrt{b^2+1}}=9$, $b^2=8$이다.

따라서 $a^2+b^2=(-4)^2+8=24$이다.

20. 정답) 13 [수학Ⅱ - 적분]

해설 : 함수 $g(x)$의 도함수는 $g'(x)=f(x)-f(x-2)$이다.

$g'(2)=0$이므로 $f(2)=f(0)$이고,

$f(x)=px(x-2)(x-k)+q$라 둘 수 있다.

$$g'(x)=f(x)-f(x-2)$$
$$=px(x-2)(x-k)-p(x-2)(x-4)(x-k-2)$$
$$=p(x-2)\left[(x^2-kx)-\{x^2-(k+6)x+4k+8\}\right]$$
$$=p(x-2)(6x-4k-8)$$

이고, $x=2$에서 극값을 가지지 않아야 하므로 $k=1$이다.

$$g(x)=\int_2^x\{f(t)-f(t-2)\}dt$$
$$=\int_2^x 6p(t-2)^2dt=2p(x-2)^3$$

이고

함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^2 2p(x-2)^3dx=\left[\frac{1}{2}p(x-2)^4\right]_0^2=-8p$의 절댓값인 $8p$이다.

즉, $8p=4$에서 $p=\frac{1}{2}$이고

$f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)+q$, $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3x+1$이다.

$f'(4)=13$

21. 정답) 132 [수학Ⅰ - 지수함수와 로그함수]

해설 : $-1<\log_5 2-\log_5 n\le 0$에서

$-\log5<\log2-\log n\le0$이고, $\log2\le\log n<\log10=1$이므로

$2\le n<10$이다.

x에 대한 방정식 $x^n=k^2$의 모든 실근이 정수이려면 $k^{\frac{2}{n}}$이

자연수여야 한다.

이때, $k=1$이면 $2\le n<10$인 모든 자연수 n에 대하여 x에 대한

방정식 $x^n=1$의 모든 실근이 정수이므로 $k\neq1$이다.

(1) k가 거듭제곱되지 않은 자연수인 경우 : $k^{\frac{2}{n}}$이 자연수가 되도록

하는 모든 자연수 n은 $1,\ 2$이다.

(2) k가 제곱수인 경우 $(k=a^2)$: $k^{\frac{2}{n}}=a^{\frac{4}{n}}$이 자연수가 되도록 하는

모든 자연수 n은 $1,\ 2,\ 4$이다.

(3) k가 세제곱수인 경우 $(k=a^3)$: $k^{\frac{2}{n}}=a^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되도록

하는 모든 자연수 n은 $1,\ 2,\ 3,\ 6$이다.

(4) k가 네제곱수인 경우 $(k=a^4)$: $k^{\frac{2}{n}}=a^{\frac{8}{n}}$이 자연수가 되도록

하는 모든 자연수 n은 $1,\ 2,\ 4,\ 8$이다.

(5) k가 다섯제곱수인 경우 $(k=a^5)$: $k^{\frac{2}{n}}=a^{\frac{10}{n}}$이 자연수가 되도록

하는 모든 자연수 n은 $1,\ 2,\ 5,\ 10$이다.

(6) k가 여섯제곱수인 경우 $(k=a^6)$: $k^{\frac{2}{n}}=a^{\frac{12}{n}}$이 자연수가 되도록

하는 모든 자연수 n은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12$이다.

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

(7) 나머지의 경우 k는 100보다 크다.

이 중 $2 \le n < 10$인 n이 세 개이려면 (3), (4)이어야한다.

(3)의 경우 $k = 2^3,\ 3^3 \le 100$

(4)의 경우 $k = 2^4,\ 3^4 \le 100$

이고 $8 + 27 + 16 + 81 = 132$이다.

22. **정답 : 32 [수학Ⅱ 미분 + 적분]**

해설 : (가) 조건의 양변을 미분하면

열린구간 $(0,\ 3)$에서 $g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$이고

함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\lim\limits_{x \to 0-} g'(x) = g'(0) = 0$이다.

(나) 조건에서 $k = 0$인 경우,

닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 $g'(x) = a \times g'(x+3)$이고

$g'(0) = a \times g'(3) = 0$에서 $g'(3) = 0$이다.

즉, 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는

$g'(0) = g'(3) = 0$이고 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

$g'(x) = 4x(x-3)(x-\alpha) = 4x^3 - (12 + 4\alpha)x^2 + 12\alpha x$라 둘 수 있고

양변을 부정적분하면

$g(x) = x^4 - \left(4 + \dfrac{4}{3}\alpha\right)x^3 + 6\alpha x^2 + C$이다.

(가) 조건에 $x = 0,\ x = 3$을 차례대로 대입하면

$g(0) = 0,\ g(3) = 9$을 얻을 수 있고,

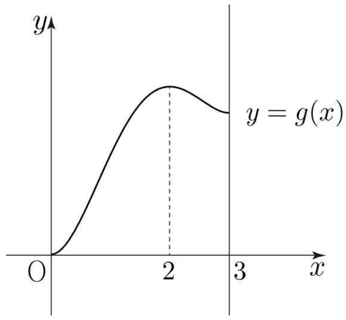
이를 부정적분으로 구한 $g(x)$의 식에 다시 대입하면

$\alpha = 2,\ C = 0,\ g(x) = x^4 - \dfrac{20}{3}x^3 + 12x^2$이다.

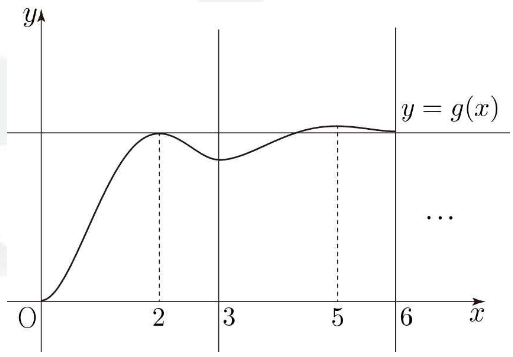
닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$는

$x = 0$에서 최솟값 0을, $x = 2$에서 최댓값 $\dfrac{32}{3}$를 갖고

아래 그림과 같은 개형을 가진다.



(나) 조건에 따라 닫힌구간 $[3,\ 6]$에서 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 y값에 $\dfrac{1}{a}$배 한 후 x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 $g(3)$만큼 평행이동시킨 그래프이고, 아래 그림과 같다. (나머지 구간들도 동일한 방법으로 하면, 계산가능하다.)



함수 $h(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 방정식 $g(x) = g(t)$의 서로 다른 실근의 개수는 항상 같아야 하고,

이는 닫힌구간 $[0,\ 6]$에서 $g(2) = g(6)$일 때이다.

($g(2) = g(6)$이면 나머지 구간에서도 $g(3n-4) = g(3n)$이다.)

$g(6) = \dfrac{1}{a} \times g(3) + g(3) = \dfrac{a+1}{a} \times g(3) = \dfrac{9a+9}{a}$에서

$g(2) = \dfrac{32}{3} = \dfrac{9a+9}{a}$이고, $a = \dfrac{27}{5}$, $p + q = 32$이다.

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

확률과 통계

23. 정답) ② **[확률과 통계 경우의 수]**

해설 : ${}_2\Pi_3+{}_2\mathrm{H}_3=2^3+{}_4\mathrm{C}_3=8+4=12$

24. 정답) ③ **[확률과 통계 확률]**

해설 : 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ⋯ ㉠

가 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B)&=\mathrm{P}(B-A)\\&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$ 이므로

$\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}$ 이고, ㉠에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ 이고,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

25. 정답) ④ **[확률과 통계 경우의 수]**

해설 : $$\begin{aligned}\left(2x-\frac{a}{x^2}\right)^5&=\sum_{r=0}^{5}\left\{{}_5\mathrm{C}_r\times(2x)^r\times\left(-\frac{a}{x^2}\right)^{5-r}\right\}\\&=\sum_{r=0}^{5}\left\{{}_5\mathrm{C}_r\times2^r\times(-a)^{5-r}\times x^{3r-10}\right\}\end{aligned}$$

에서 $3r-10=5$를 만족시키는 r의 값은 5이므로

x^5의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_5\times2^5\times(-a)^0=32$,

$3r-10=-1$을 만족시키는 r의 값은 3이므로

$\frac{1}{x}$의 계수는 ${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times(-a)^2=80a^2$,

x^5의 계수와 $\frac{1}{x}$의 계수가 서로 같으므로

$32=80a^2$에서 $a^2=\frac{2}{5}$,

$3r-10=-7$을 만족시키는 r의 값은 1이므로

$\frac{1}{x^7}$의 계수는

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_1\times2^1\times(-a)^4&=5\times2\times a^4\\&=5\times2\times\frac{4}{25}\\&=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

26. 정답) ① **[확률과 통계 확률]**

해설 : 회전하여 일치하는 모든 경우를 같은 것으로 볼 때,

8명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로

둘러앉는 경우의 수는 $\frac{8!}{8}=7!$ ⋯ ㉠

한 자리에 학생 B를 고정하고 학생 B가 아닌 남은 2학년 학생 4명을 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

학생 B와 이웃한 두 자리 중 한 자리에 학생 A를 배열하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1=2$

학생 A가 앉은 자리를 제외한 임의의 두 2학년 학생 사이에 학생 A가 아닌 남은 1학생 학생 2명을 배열하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=12$

따라서 주어진 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{4!\times2\times12}{7!}=\frac{2\times12}{7\times6\times5}=\frac{4}{35}$$

27. 정답) ⑤ **[확률과 통계 확률]**

해설 : 선택한 1의 개수에 따라 경우를 나누어

집합 S의 원소의 개수를 구하자.

(i) 1이 3개인 경우

$(1,1,1,2)$ 또는 $(1,1,1,3)$이어야 하고

경우의 수는 $\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}=8$이다.

이때, (i)의 경우를 만족시키는 네 자리의 자연수의 각 자리의 모든 숫자의 곱은 4 이하이다.

(ii) 1이 2개인 경우

$(1,1,2,2)$ 또는 $(1,1,2,3)$이어야 하고

경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}+\frac{4!}{2!}=18$이다.

이때, (ii)의 경우를 만족시키는 네 자리의 자연수 중 각 자리의 모든 숫자의 곱이 4 이하인 경우는 $(1,1,2,2)$이고

그 경우의 수는 6이다.

(iii) 1이 1개인 경우

$(1,2,2,3)$이어야 하고

경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다.

이때, (iii)의 경우를 만족시키는 네 자리의 자연수의 각 자리의 모든 숫자의 곱은 4보다 크다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 집합 S의 원소의 개수는

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

$8+18+12=38$이고,

집합 S의 원소 중 각 자리의 모든 숫자의 곱이 4 이하인 원소의 개수는 $8+6=14$이므로

구하는 확률은 $\frac{14}{38}=\frac{7}{19}$이다.

28. 정답) ④ [확률과 통계 경우의 수]

해설 : 집합 A의 모든 원소의 곱이 8의 배수가 되기 위해서

집합 A는 반드시 2와 4를 원소로 가져야 하고

원소의 개수가 3 이하이어야 하므로

가능한 모든 집합 A는 다음과 같다.

$\{2, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$

(i) $A=\{2, 4\}$인 경우

조건 (나)를 만족하기 위해서 $f(1)=4$이어야 하고, 1이 아닌 세 원소 2, 3, 4가 모두 4로만 대응되는 경우를 제외하면

$2^3-1=7$

(ii) $A=\{1, 2, 4\}$인 경우

조건 (나)를 만족하기 위해서 $f(1)=4$이어야 하고,

$f(2)\neq 1$이어야 한다.

$f(1)=4$이고 $A=\{1, 2, 4\}$인 경우는

1이 아닌 세 원소 2, 3, 4가 모두 1, 4로만 또는 모두 2, 4로만 대응되는 경우를 제외하고, 모두 4로만 대응되는 경우는 중복하여 제외하였으므로 다시 더해주면

$3^3-(2^3+2^3-1)=12$

이때, $f(1)=4$, $f(2)=1$이고 $A=\{1, 2, 4\}$인 경우는

1, 2가 아닌 두 원소 3, 4가 모두 1, 4로만 대응되는 경우를 제외하면

$3^2-2^2=5$

따라서 $A=\{1, 2, 4\}$이면서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$12-5=7$

(iii) $A=\{2, 3, 4\}$인 경우

조건 (나)를 만족하기 위해서 $f(1)\neq 2$이면 된다.

$f(1)=4$이고 $A=\{2, 3, 4\}$인 경우는

1이 아닌 세 원소 2, 3, 4가 모두 2, 4로만 또는 모두 3, 4로만 대응되는 경우를 제외하고, 모두 4로만 대응되는 경우는 중복하여 제외하였으므로 다시 더해주면

$3^3-(2^3+2^3-1)=12$

같은 방법으로 $f(1)=3$인 경우의 수도 12이므로

$A=\{2, 3, 4\}$이면서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$12+12=24$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 모든 함수 f의 개수는

$7+7+24=38$

29. 정답) 92 [확률과 통계 확률]

해설 : (i) $a_1=1$인 경우

$a_1=1$일 확률은 $\frac{3}{8}$,

남은 7장의 카드에 적힌 숫자는 각각

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3이고

a_1+a_2가 3의 배수가 되는 경우는 [실행 2]에서 숫자 2가 적힌 카드를 뽑는 경우뿐이므로

a_1+a_2가 3의 배수일 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{56}$

이고 이때, $a_2\leq 4$이다.

(ii) $a_1=2$인 경우

$a_1=2$일 확률은 $\frac{3}{8}$,

남은 7장의 카드에 적힌 숫자는 각각

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3이고

a_1+a_2가 3의 배수가 되는 경우는 [실행 2]에서 숫자 1이 적힌 카드 1장과 숫자 3이 적힌 카드 1장을 뽑는 경우 또는 숫자 2가 적힌 카드 2장을 뽑는 경우뿐이므로

a_1+a_2가 3의 배수일 확률은

$\frac{3}{8}\times\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1+{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{8}$

이고 이때, $a_2\leq 4$이다.

(iii) $a_1=3$인 경우

$a_1=3$일 확률은 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$,

남은 7장의 카드에 적힌 숫자는 각각

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3이고

a_1+a_2가 3의 배수가 되는 경우는 [실행 2]에서

숫자 1이 적힌 카드 3장을 뽑는 경우 또는

숫자 2가 적힌 카드 3장을 뽑는 경우 또는

숫자 1, 2, 3이 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑는 경우뿐이므로

a_1+a_2가 3의 배수일 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{{}_3C_3+{}_3C_3+{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_7C_3}=\frac{11}{140}$

이고 이때, $a_2\leq 4$인 경우는

숫자 1이 적힌 카드 3장을 뽑는 경우뿐이고 그 확률은

이 문제지에 관한 저작권은 떵수학 연구실에 있습니다.

$\frac{1}{4}\times\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{140}$ 이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 조건부확률은

$\dfrac{\frac{9}{56}+\frac{1}{8}+\frac{1}{140}}{\frac{9}{56}+\frac{1}{8}+\frac{11}{140}}=\dfrac{45+35+2}{45+35+22}=\dfrac{82}{102}=\dfrac{41}{51}$ 이므로

$p=51$, $q=41$에서 $p+q=92$이다.

30. 정답) 246 **[확률과 통계 경우의 수]**

해설 : 조건 (가)를 만족하는 모든 순서쌍 (a,b,c,d)는 다음과 같다.

$(0,0,0,4)$, $(0,0,1,3)$, $(0,0,2,2)$, $(0,1,1,2)$

위의 네 경우에 따라 경우를 나누어 살펴보자.

(ⅰ) $(0,0,0,4)$인 경우

세 학생 A, B, C에게 각각 0이 적힌 카드를 각각 1장을, 학생 D에게 1이 적힌 카드 2장과 2가 적힌 카드 1장을 나누어주면 네 학생 A, B, C, D가 받은 카드의 개수는 각각 1, 1, 1, 3이고 남은 모든 카드는 0이 적힌 카드 4장이다.

조건 (나)를 만족시키도록 남은 카드 4장을 나누어주는 경우의 수는 학생 D가 3장 이상의 카드를 더 받는 경우만 제외하면 되므로 (ⅰ)의 경우의 수는

${}_4H_4-{}_4H_1={}_7C_3-{}_4C_1=35-4=31$

(ⅱ) $(0,0,1,3)$인 경우

두 학생 A, B에게 각각 0이 적힌 카드를 각각 1장을, 학생 C에게 1이 적힌 카드 1장을, 학생 D에게 1이 적힌 카드 1장과 2가 적힌 카드 1장을 나누어주면 네 학생 A, B, C, D가 받은 카드의 개수는 각각 1, 1, 1, 2이고 남은 모든 카드는 0이 적힌 카드 5장이다.

조건 (나)를 만족시키도록 남은 카드 5장을 나누어주는 경우의 수는 학생 D가 4장 이상의 카드를 더 받는 경우와 세 학생 A, B, C 중 한 학생이 5장의 카드를 더 받는 경우를 제외하면 되므로 (ⅱ)의 경우의 수는

${}_4H_5-{}_4H_1-3={}_8C_3-{}_4C_1-3=56-4-3=49$

(ⅲ) $(0,0,2,2)$인 경우

두 학생 A, B에게 각각 0이 적힌 카드를 각각 1장을, 학생 C에게 2가 적힌 카드 1장을, 학생 D에게 1이 적힌 카드 2장을 나누어주면 네 학생 A, B, C, D가 받은 카드의 개수는 각각 1, 1, 1, 2이고 남은 모든 카드는 0이 적힌 카드 5장이다.

조건 (나)를 만족시키도록 남은 카드 5장을 나누어주는 경우의 수는 학생 D가 4장 이상의 카드를 더 받는 경우와 세 학생 A, B, C 중 한 학생이 5장의 카드를 더 받는 경우를 제외하면 되므로 (ⅱ)에서와 같은 방법으로 경우의 수는 49

두 학생 A, B에게 0이 적힌 카드를 각각 1장씩을, 학생 C에게 1이 적힌 카드 2장을, 학생 D에게 2가 적힌 카드 1장을 나누어주는 경우도 위와 같이 경우의 수는 49

따라서 (ⅲ)의 경우의 수는 $49+49=98$

(ⅳ) $(0,1,1,2)$인 경우

학생 A에게 0이 적힌 카드 1장을, 두 학생 B, C에게 각각 1이 적힌 카드 1장을, 학생 D에게 2가 적힌 카드 1장을 나누어주면 네 학생 A, B, C, D가 받은 카드의 개수는 각각 1, 1, 1, 1이고 남은 모든 카드는 0이 적힌 카드 6장이다.

조건 (나)를 만족시키도록 남은 카드 6장을 나누어주는 경우의 수는 각 학생이 5장 이상의 카드를 더 받는 경우를 제외하면 되므로 (ⅱ)의 경우의 수는

${}_4H_6-4\times{}_4H_1={}_9C_3-4\times{}_4C_1=84-16=68$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$31+49+98+68=246$

이 문제지에 관한 저작권은 떵수학 연구실에 있습니다.

미적분

23. 정답) ④ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{2-0}{1+0}=2$

24. 정답) ② [미적분 미분법]

해설 : $g(4)=0$에서 $f(0)=4$이므로 $a=3$이다.

$f'(x)=2e^{2x}+3e^x$이므로

$g'(4)=\frac{1}{f'(g(4))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2+3}=\frac{1}{5}$

25. 정답) ③ [미적분 미분법]

해설 : $\frac{dx}{dt}=1+2\sin t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1+2\sin t\cos t$이므로

시각 t에서 점 P의 속력은

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{2(1+2\sin t\cos t)^2}$

$\sin t\cos t=k$라 하면

$\sqrt{2(1+2k)^2}$에서 $k=-\frac{1}{2}$일 때 점 P의 속력은

최솟값 0을 가지므로

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$이다.

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$\sin\theta=-\cos\theta$이고, 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta=\cos^2\theta$,

$\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$,

$\sin^2\theta=\frac{1}{2}$이고 $0\le\theta\le\pi$에서 $\sin\theta\ge0$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

따라서 $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=-\sqrt{2}$이다.

26. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자. $(a>0,\ r>0)$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이고

조건 (가)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$이 수렴하므로

$-1<\frac{1}{r}<1$에서 $r>1$이다. ($\because\ r>0$)

조건 (나)에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{5^{n-2}}-S\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^{n-2}}=S$, 즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{a\times r^{n-1}}{5^{n-2}}=S$ ⋯ ㉠

이때, 조건 (가)에서

$S=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r}{a(r-1)}>0$ ($\because\ r>0$) ⋯ ㉡

이므로 ㉠에서 $r=5$, $S=5a$이다.

㉡에 $r=5$, $S=5a$를 대입하면

$5a=\frac{5}{4a}$에서 $a=\frac{1}{2}$, $S=\frac{5}{2}$이다.

따라서 $a_1+S=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$이다.

27. 정답) ② [미적분 수열의 극한]

해설 : 점 B_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{C_1H}=\frac{1}{2}\times(\overline{C_1O}-\overline{A_1B_1})=3$

직각삼각형 B_1C_1H에서 $\angle B_1C_1H=\theta$라 하면

$\cos\theta=\frac{\overline{C_1H}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{3}{5}$이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

두 직선 B_1A_1, C_1O는 서로 평행하므로

$\angle C_1B_1D_1=\pi-\theta$이고 따라서

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{B_1D_1}\times\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times5\times1\times\sin\theta$

$=2$

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{C_1D_1}^2=5^2+1^2-2\times5\times1\times\cos(\pi-\theta)$

$=25+1-2\times5\times1\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=32$

따라서 $\overline{C_1D_1}=4\sqrt{2}$

이때 삼각형 B_1C_1H에서 $\overline{B_1H}=\sqrt{5^2-3^3}=4$이고

점 D_1에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{D_1H'}=\overline{B_1H}=4$이므로

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

삼각형 C_1D_1H'은 직각이등변삼각형이다.

따라서 $\angle D_1C_1H' = \frac{\pi}{4}$이다.

점 B_2에서 선분 C_1O에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

삼각형 B_2C_1M도 직각이등변삼각형이고 $\overline{B_1M} = 4k$라 하면

$\overline{C_1M} = 4k$, $\overline{MO} = 10 - 4k$이다.

이때, 두 사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$는 서로 닮음이고

닮음비가 $\overline{B_1H} : \overline{B_2M} = 4 : 4k = 1 : k$이므로

$\overline{MO} = 7k$이고 $10 - 4k = 7k$에서 $k = \frac{10}{11}$이다.

따라서 두 사각형 $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$의 넓이의 비는

$1^2 : \left(\frac{10}{11}\right)^2 = 1 : \frac{100}{121}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2}{1 - \frac{100}{121}} = \frac{242}{21}$$

28. 정답) ② [미적분 미분법]

해설 : 양의 실수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$을 지나고 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선의 접점의 x좌표를 s라 하자.

$f'(x) = 3x^2 + 4t$이므로

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선의 방정식은

$y = (3s^2 + 4t)(x - s) + s^3 + 4ts$이고

이 직선이 점 $(t,\ 0)$을 지나므로 다음이 성립한다.

$$0 = (3s^2 + 4t)(t - s) + s^3 + 4ts$$
$$\Leftrightarrow\ 2s^3 - 3s^2t - 4t^2 = 0 \quad \cdots \text{㉠}$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 다시 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점의 x좌표를 구하면

$$f(x) = (3s^2 + 4t)(x - s) + s^3 + 4ts$$
$$\Leftrightarrow\ x^3 + 4tx = 3s^2x + 4tx - 2s^3$$
$$\Leftrightarrow\ x^3 - 3s^2x + 2s^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ (x - s)^2(x + 2s) = 0$$

에서

$$g(t) = -2s \quad \cdots \text{㉡}$$
$$g'(t) = -2 \times \frac{ds}{dt} \quad \cdots \text{㉢}$$

이다. 이때 ㉠에 $t = 1$을 대입하면

$2s^3 - 3s^2 - 4 = 0$,

$(s - 2)(2s^2 + s + 2) = 0$,

$s = 2$

이므로 ㉡에서 $g(1) = -4$이다.

㉠의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$6s^2 \times \frac{ds}{dt} - 6st \times \frac{ds}{dt} - 3s^2 - 8t = 0,$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{3s^2 + 8t}{6s^2 - 6st}$$

이고 $t = 1$일 때, $s = 2$이므로

$t = 1$일 때 $\frac{ds}{dt}$의 값은 $\frac{12 + 8}{24 - 12} = \frac{5}{3}$이다.

따라서 ㉢에서 $g'(1) = -\frac{10}{3}$이다.

따라서 $g(1) \times g'(1) = \frac{40}{3}$이다.

29. 정답) 11 [미적분 미분법]

해설 : 직각삼각형 ABP에서 $\overline{AP} = 2\cos\theta$이다.

정삼각형 PQR의 한 변의 길이를 $d(\theta)$라 하자.

점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{RH} = \frac{\sqrt{3}}{2}d(\theta)$, $\overline{AH} = 2\cos\theta - \frac{1}{2}d(\theta)$이다.

이때, 삼각형 ARH는 직각삼각형이므로

$\tan\theta = \frac{\overline{RH}}{\overline{AH}}$이고 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\tan\theta\left\{2\cos\theta - \frac{1}{2}d(\theta)\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}d(\theta),$$
$$2\sin\theta = \frac{\tan\theta + \sqrt{3}}{2}d(\theta),$$
$$d(\theta) = \frac{4\sin\theta}{\tan\theta + \sqrt{3}}$$

이때, $f(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}\{d(\theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16\sin^2\theta}{(\tan\theta + \sqrt{3})^2}}{\theta^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\angle AQR = \pi - \angle RQP = \frac{2}{3}\pi$이고

직선 QS는 $\angle AQR$의 이등분선이므로

이 문제지에 관한 저작권은 떵수학 연구실에 있습니다.

$\angle \mathrm{AQS} = \angle \mathrm{SQR} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\overline{\mathrm{AQ}} = 2\cos\theta - d(\theta)$, $\angle \mathrm{ASQ} = \frac{2}{3}\pi - \theta$ 이고

삼각형 AQS에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{\overline{\mathrm{AS}}}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$\overline{\mathrm{AS}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right)} \times \overline{\mathrm{AQ}}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AS}} \times \overline{\mathrm{AQ}} \times \sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right)} \times \{2\cos\theta - d(\theta)\}^2 \times \sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\theta}{4\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right)} \times \{2\cos\theta - d(\theta)\}^2$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0+} \left[\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\theta} \times \frac{\{2\cos\theta - d(\theta)\}^2}{4\sin\left(\frac{2}{3}\pi + \theta\right)} \right]$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{4}{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) g(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0+} \left\{ \frac{f(\theta)}{\theta^2} \times \frac{g(\theta)}{\theta} \right\}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $p = 3$, $q = 8$ 이므로 $p + q = 11$

30. 정답) 74 [미적분 미분법]

해설 : $g'(x) = -\pi f'(x) \times \sin\{\pi \times f(x)\}$

함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극값을 가지면 $f'(\alpha) = 0$ 또는

$\sin\{\pi \times f(\alpha)\} = 0$

이때, 조건 (가)에서 함수 $g(x)$는 $x = \frac{1}{2}$ 에서

극솟값 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 을 가지고

$\sin\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 0$ 이면 $g\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ 의 값은

1 또는 -1 이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right) \neq \frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 이어야 하고

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 에서 정수 n에 대하여

$$\cos\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2n + \frac{1}{3} \text{ 또는 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2n - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n + \frac{1}{3}$$

또는 $f(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n - \frac{1}{3}$ (단, m은 자연수)

이때, 함수 $g(x)$가 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 가지려면

$g'(x)$의 부호가 $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서 음에서 양으로 바뀌어야 한다.

$f'(x) = 2m\left(x - \frac{1}{2}\right)$의 부호는 $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서

음에서 양으로 바뀌므로 $g'(x) = -\pi f'(x) \times \sin\{\pi \times f(x)\}$에서

$\sin\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} < 0$ 이어야 한다.

$f(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n + \frac{1}{3}$ 이면

$\sin\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ 이고

$f(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n - \frac{1}{3}$ 이면

$\sin\left\{\pi \times f\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ 이므로

$f(x) = m\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n - \frac{1}{3}$ 이다.

$g'(x) = -\pi f'(x) \times \sin\{\pi \times f(x)\}$에서

$f'(x) = 0$ 이 되는 x의 값은 $\frac{1}{2}$ 뿐이므로

$\alpha \neq \frac{1}{2}$ 이고 함수 $g(x)$가 $x = \alpha$에서 극값을 가지면

$\sin\{\pi \times f(\alpha)\} = 0$ 이다.

이때, 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

함수 $y = g(x)$의 그래프도 직선 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 대칭이고

함수 $g(x)$는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극솟값을 가지므로

열린구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 4임을

확인하는건 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의

개수가 2임을 확인하여도 충분하다.

$f(\alpha)$의 값이 정수이면 함수 $g(x)$는 $x = \alpha$에서 극대 또는

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.

극소이고 함수 $f(x)$는 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 증가하므로

$f(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2n-\frac{1}{3}$ 일 때,

$f(x)$의 값이 $2n,\ 2n+1,\ 2n+2,\ \cdots$이 되는 x에서 극대 또는 극소이다.

이때, $x=\frac{1}{2}$에서 함수 $g(x)$가 극소이므로

$f(x)$의 값이 $2n,\ 2n+2,\ \cdots$이 되는 x에서 극대이고,

$f(x)$의 값이 $2n+1,\ 2n+3,\ \cdots$이 되는 x에서 극소이다.

따라서 열린구간 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 2이려면 $2n+2<f(1)<2n+4$이어야 한다.

$2n+2<f(1)=\frac{m}{4}+2n-\frac{1}{3}<2n+4$,

$\frac{7}{3}<\frac{m}{4}<\frac{13}{3}$,

$\frac{28}{3}<m<\frac{52}{3}$

따라서 가능한 모든 자연수 m의 범위는 $10\le m\le 17$이다.

이때, $f(0)=f(1)$이므로 $1\le f(0)\le 2$에서 $n=-1$이어야 한다.

따라서 $f(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{3}$이고

$1\le f(0)\le 2$

$\Leftrightarrow\ 1\le \frac{m}{4}-\frac{7}{3}\le 2$

$\Leftrightarrow\ \frac{10}{3}\le\frac{m}{4}\le\frac{13}{3}$

$\Leftrightarrow\ \frac{40}{3}\le m\le\frac{52}{2}$

이고 가능한 모든 자연수 m의 값은 $14,\ 15,\ 16,\ 17$이다.

$f(x)=m\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{3}$에서 $f(1)=\frac{m}{4}-\frac{7}{3}$이므로

모든 $f(1)$의 값의 합은

$S=\frac{14+15+16+17}{4}-4\times\frac{7}{3}=\frac{31}{2}-\frac{28}{3}$이므로

$12S=31\times 6-4\times 28=74$

이 문제지에 관한 저작권은 띵수학 연구실에 있습니다.