제 2 교시

수학 영역 KSM

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

$f'(2)$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

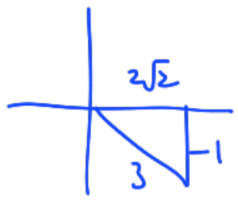
$f'(x) = 6x^2 - 10x$

$f'(2) = 24 - 20 = 4$

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$



$\tan\theta = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \ge 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6 - a = 4 + a$

$a = 1$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=3x^2-6x$

$f(x)=x^3-3x^2+C$

$f(1)=1-3+C=6,\ C=8$

$f(2)=8-12+8=4$

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_3+a_4=3a_4$

$a_3=2a_4$

$1=2r,\ r=\frac{1}{2}$

$a_5=ar^4=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{16}a=\frac{3}{4}$

$a=12$

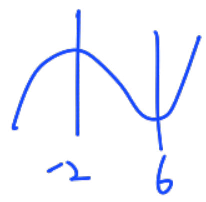
$a_1+a_2=12+6=18$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12$

$=(x-6)(x+2)$



$\alpha=-2$

$\beta=6$) $\beta-\alpha=8$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) - f(x) = 3x^4 - 3x \quad 3x(x^3-1)$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$(x-1)f(x) = 3x(x-1)(x^2+x+1)$

$f(x) = 3x(x^2+x+1)$

$= 3x^3+3x^2+3x$

$\int_{-2}^{2}(\cancel{3x^3}+3x^2+\cancel{3x})dx = 2\int_0^2 3x^2 dx$

$= 2[x^3]_0^2 = 16$

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$\frac{m\log_5 12 + (1-m)\log_5 3}{m+(1-m)} = 1$

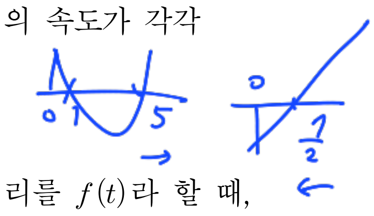
$\log_5 12^m \cdot 3^{1-m} = 1$

$2^{2m}\cdot 3^m \cdot 3^{1-m} = 5$

$4^m \cdot 3 = 5$, $\therefore 4^m = \frac{5}{3}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = t^2 - 6t + 5, \quad v_2(t) = 2t - 7$$

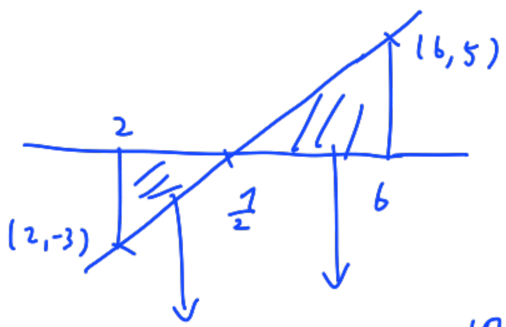


이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$v_1(t) - v_2(t) = t^2-8t+12 = (t-2)(t-6)$

$a=2$
$b=6$



$\frac{9}{4} + \frac{25}{4} = \frac{17}{2}$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$|a_6| = |a_8| \rightarrow d > 0$

$|a+5d| = |a+7d|$

$-a-5d = a+7d, \ a=-6d$

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6}\right) = \frac{5}{96}$

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{-6d} - \frac{1}{-d}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{-5}{-6d}\right) = \frac{5}{96}$

$d^2 = 16, \ d = 4, \ a = -24$

$\sum_{1}^{15} a_k = \frac{15(2a+14d)}{2} = 15(a+7d)$

$= 60$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

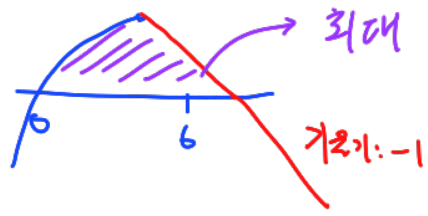
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

g지는 $x=t$ 연속

$-x+t+f(t)$: 기울기 -1인 직선

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

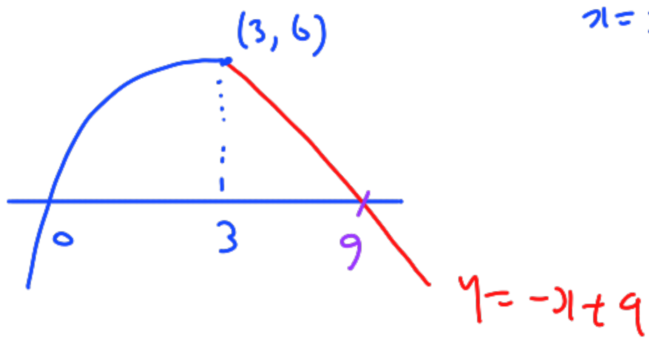


$f = \frac{1}{9}(x^3 - 15x^2 + 54x)$

$f' = \frac{1}{9}(3x^2 - 30x + 54) = -1$

$x^2 - 10x + 21 = 0$

$x = 3, 7$



$\int_0^3 f(x)\,dx + \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 6$

$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - 5x^3 + 27x^2\right]_0^3 + 18$

$= \left(\frac{9}{4} - 15 + 27\right) + 18 = \frac{129}{4}$

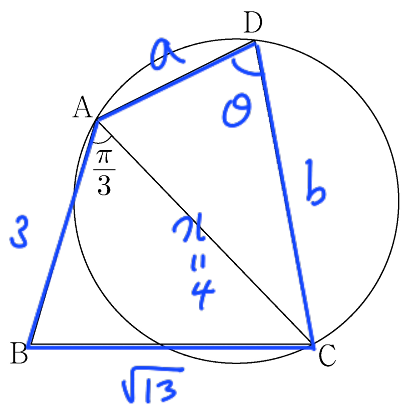
13. 그림과 같이

$$\overline{AB}=3,\quad \overline{BC}=\sqrt{13},\quad \overline{AD}\times\overline{CD}=9,\quad \angle BAC=\frac{\pi}{3}$$

$ab=9$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

$\triangle ABC \Rightarrow 13 = x^2+9-2\cdot3\cdot x\cdot\frac{1}{2}$

$x^2-3x-4=0,\ x=4$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt3}{2}=3\sqrt3=S_1 \quad \therefore S_2=\frac{5}{2}\sqrt3$

$S_2=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{5}{2}\sqrt3$

$ab=9 \Rightarrow \frac{9}{2}\sin\theta=\frac{5}{2}\sqrt3 \quad \therefore \sin\theta=\frac{5}{9}\sqrt3$

$\cos\theta=\frac{\sqrt6}{9}$

$\frac{4}{\sin\theta}=2R,\quad \therefore R=\frac{2}{\sin\theta}$

$\therefore \frac{R}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}=2\times\frac{81}{75}=\frac{54}{25}$

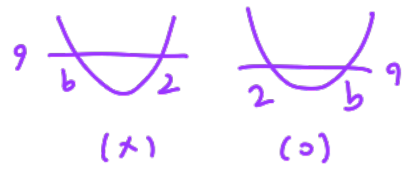
14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

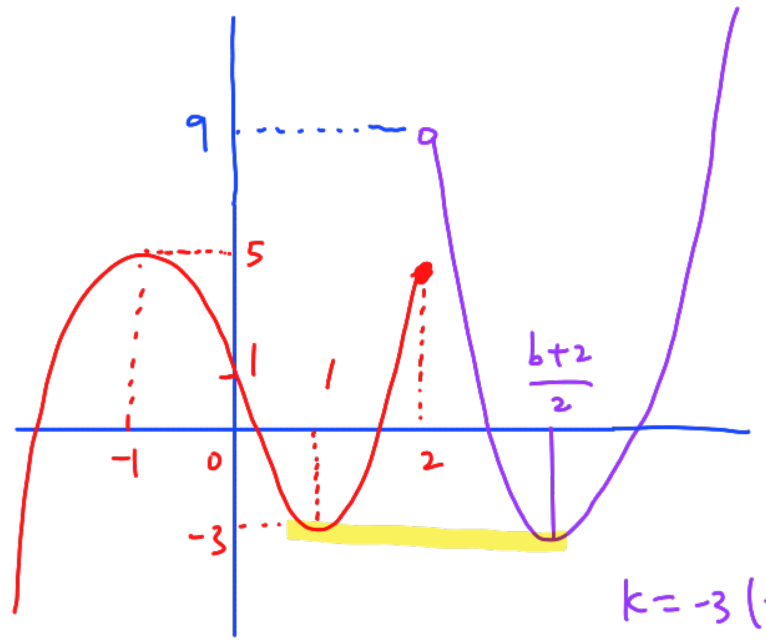
이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$



를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55



$k=-3$ (유일)

$a(x-2)(x-b)+9 \quad \left(\frac{b+2}{2}, -3\right)$

$a\left(\frac{b-2}{2}\right)\left(\frac{-b+2}{2}\right)+9=-3$

$-\frac{a}{4}(b-2)^2=-12 \qquad a(b-2)^2=48$

3	16
12	4
48	1

a	b	a+b
3	6	9
12	4	16
48	3	51

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

a_6 홀 ⇒ $a_7 = 2^{a_6}$, $a_6 + a_7 = 3$ $\left.\begin{matrix} a_6=1 \\ a_7=2 \end{matrix}\right)$

a_6 짝 ⇒ $a_7 = \frac{1}{2}a_6$, $a_6 + a_7 = 3$ $\left.\begin{matrix} a_6=2 \\ a_7=1 \end{matrix}\right)$

i) $a_6=1$, $a_7=2$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

1, 4 > 1 > 2 − 1 > 2 − 1 − 2

8 − 4

6 − 3 > 8 − 4

32 − 16

(ii) $a_6=2$, $a_7=1$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7

2 − 1, 8 − 4 > 1 > 2 − 1 > 2 − 1

3, 16 > 8 − 4

12 − 6 − 3 > 8 − 4

5, 64 > 32 − 16

$1+2+3+4+5+6+8+12+16+32+64$

$= 153$

단답형

16. 방정식 $3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{2}$

$3^{x-8} = 3^{-3x}$, $x=2$

17. 함수 $f(x) = (x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = (x^2+3) + (x+1)\cdot 2x$ $\boxed{8}$

$f'(1) = 4 + 4 = 8$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{9}$

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha$

$\sum_{k=1}^{10} b_k = \beta$

$\alpha = 2\beta - 10$ $\qquad$ $3\alpha + \beta = 33$

$3(2\beta - 10) + \beta = 33$

$7\beta = 63, \quad \beta = 9$

19. 함수 $f(x) = \sin \frac{\pi}{4} x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x) f(2-x) < \frac{1}{4}$$

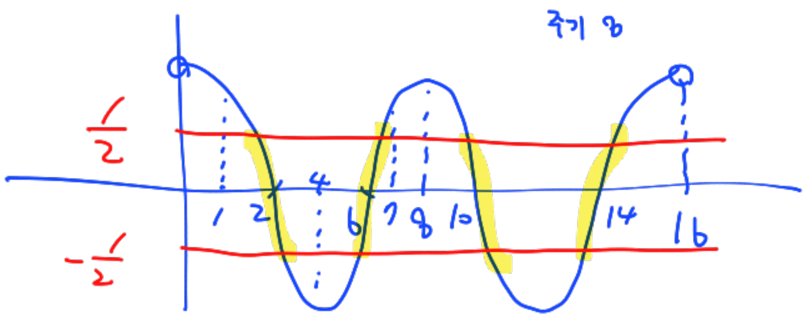
을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{32}$

$f(2+x) f(2-x)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right)$

$= \left(\cos \frac{\pi}{4}x\right)^2 < \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{2} < \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}x}_{\text{주기 } 8} < \frac{1}{2}$



$x = 2, 6, 10, 14$ $\qquad$ $2+6+10+14 = 32$

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

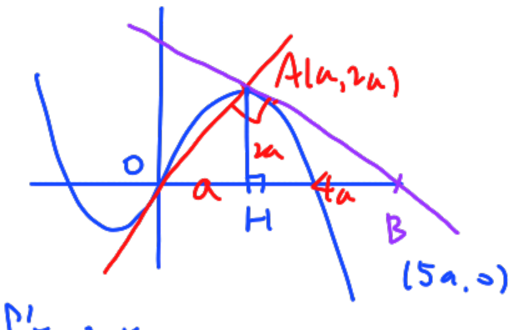
라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

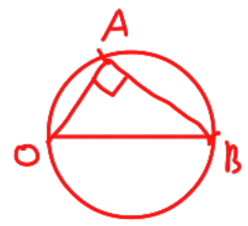
$\boxed{25}$

$f = -x(x^2 - ax - 2) \rightarrow D = a^2 + 8 > 0$

$\alpha + \beta = a > \sqrt{2}$

$\alpha\beta = -2 < 0$





$f' = -3x^2 + 2ax + 2$

$f'(0) = 2, \quad y = 2x$

$-x^3 + ax^2 + 2x = 2x$

$-x^2(x - a) = 0, \quad x = 0, a \quad \mathrm{A}(a, 2a)$

$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{OH} \times \mathrm{BH} \quad \therefore \mathrm{BH} = 4a \quad \mathrm{B}(5a, 0)$

$f'(a) = -a^2 + 2 = \frac{0 - 2a}{5a - a} = -\frac{1}{2}, \quad a^2 = \frac{5}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{OB}} = 10a^2 = 25$

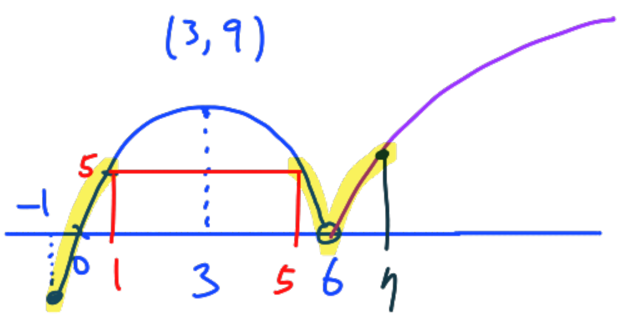
21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

$-x(x-6)$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

$\boxed{10}$



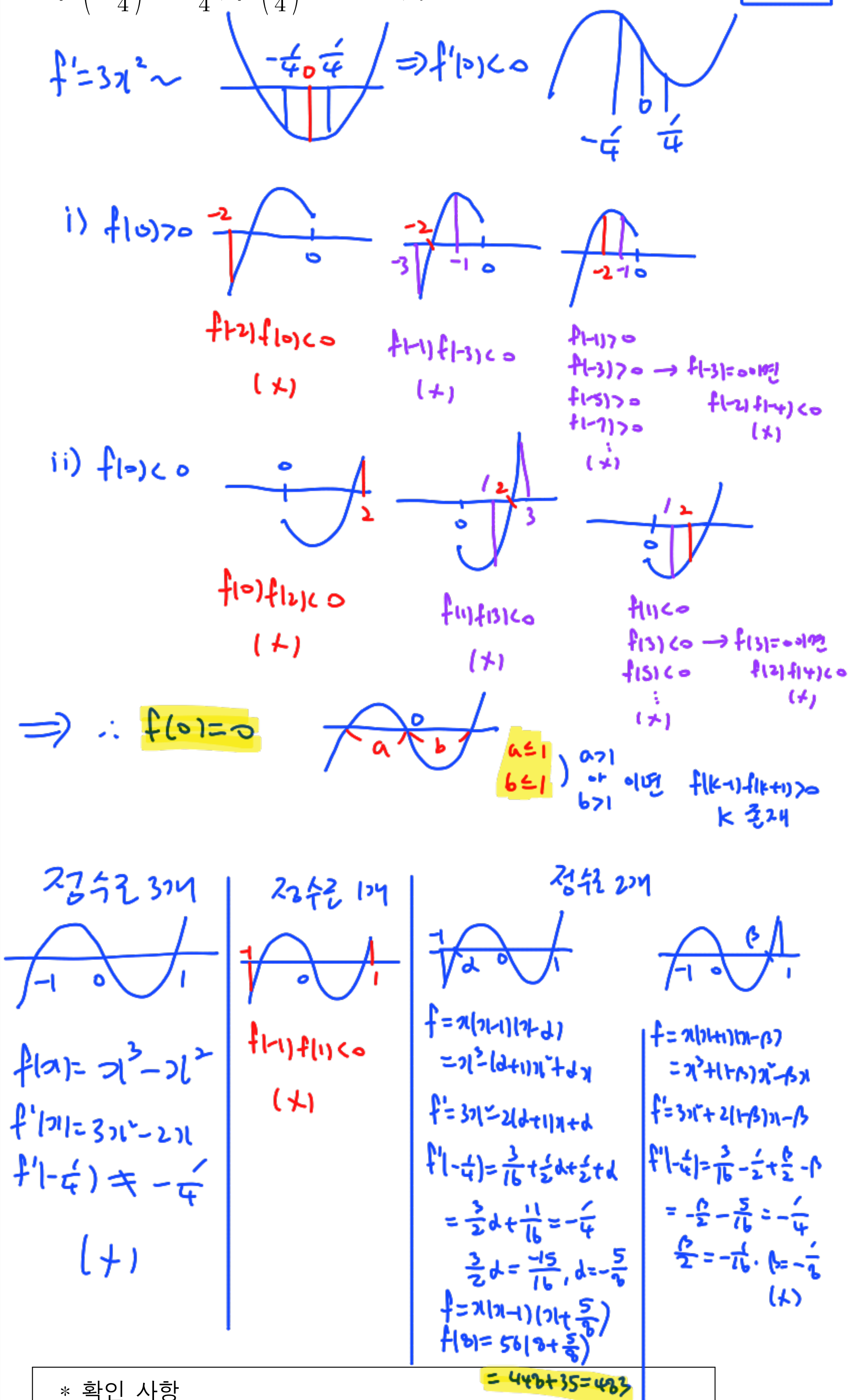
$f(7) = a\log_4 2 \geq 5, \quad a \geq 10$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1) < 0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) < 0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{483}$



> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$\frac{5!}{2!2!} = 30$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

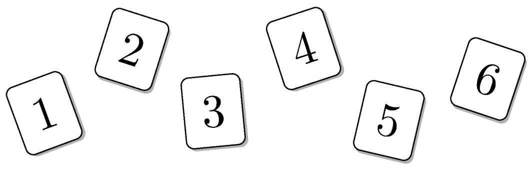
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$1 - P(A) = 2P(A)$, $P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ $\therefore P(B) = \frac{3}{4}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



10초과 ⇒ 6 — 5, 5 — 6) $2\times4!$

$\therefore 1-\frac{2\times4!}{6!}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

X	0	1	2이상	
	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$	1

Y	0	1	2
	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{11}{16}$

$E(Y)=\frac{4}{16}+\frac{22}{16}=\frac{26}{16}=\frac{13}{8}$

27. 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

$\bar{x} - 1.96 \cdot \frac{5}{7} \le m \le \bar{x} + 1.96 \cdot \frac{5}{7}$

$\qquad \| \qquad\qquad\qquad \|$

$\qquad a \qquad\qquad\qquad \frac{6}{5}a$

$(\frac{6}{5}a - a) = 3.92 \times \frac{5}{7} = 2.8$

$\frac{1}{5}a = 2.8, \quad a = 14$

$\therefore a = \bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{7}$

$14 = \bar{x} - 1.4$

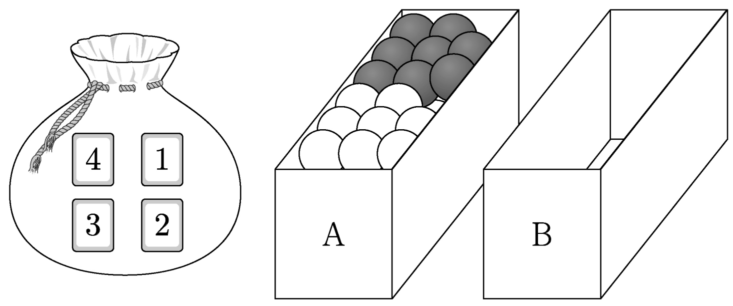
$\bar{x} = 15.4$

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> X 확인한 수가 1이면 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> Y 확인한 수가 2 또는 3이면 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> Z 확인한 수가 4이면 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



1 → ○ $\qquad$ X: $\frac{1}{4}$

2,3 → ○● $\qquad$ Y: $\frac{1}{2}$

4 → ○○● $\qquad$ Z: $\frac{1}{4}$

X Y Z

2 0 2 → ${}_4C_2 (\frac{1}{4})^2 (\frac{1}{4})^2 = \frac{6}{256} = \frac{3}{128}$

1 2 1 → $({}_4C_2 \times 2)(\frac{1}{4})(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{4}) = \frac{12}{64} = \frac{24}{128}$

0 4 0 → $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} = \frac{8}{128}$

$\therefore \frac{3}{3+24+8} = \frac{3}{35}$

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{196}$

> $a \leq c \leq d$이고 $b \leq c \leq d$이다.

c	
1	$1^2 \times 6$
2	$2^2 \times 5$
3	$3^2 \times 4$
4	$4^2 \times 3$
5	$5^2 \times 2$
6	$6^2 \times 1$

$$\sum_{k=1}^{6} k^2(7-k)$$
$$= \sum_{k=1}^{6} (7k^2 - k^3)$$
$$= 7 \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \left(\frac{6 \cdot 7}{2}\right)^2$$
$$= 637 - 441 = 196$$

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{673}$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

$\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{5t-1}{t}\right) \geq \frac{1}{2}$ $\quad \therefore \frac{5t-1}{t} \geq 0,\ t \geq \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$

$= \mathrm{P}(t - 1 \leq Z \leq t + 1)$ 최대 $\Rightarrow \left|\frac{(t-1)+(t+1)}{2}\right| = |t|$ 최소 $\therefore t = \frac{1}{5}$

$\mathrm{P}\left(-\frac{4}{5} \leq Z \leq \frac{6}{5}\right) = 0.288 + 0.385 = 0.673 = k$

$1000k = 673$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x = \ln(t^3+1), \quad y = \sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi \cos \pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}$$

$$t=1 \rightarrow \frac{-\pi}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\pi$$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

$= \ln\left|\frac{a^2(a+1)}{2}\right|$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$

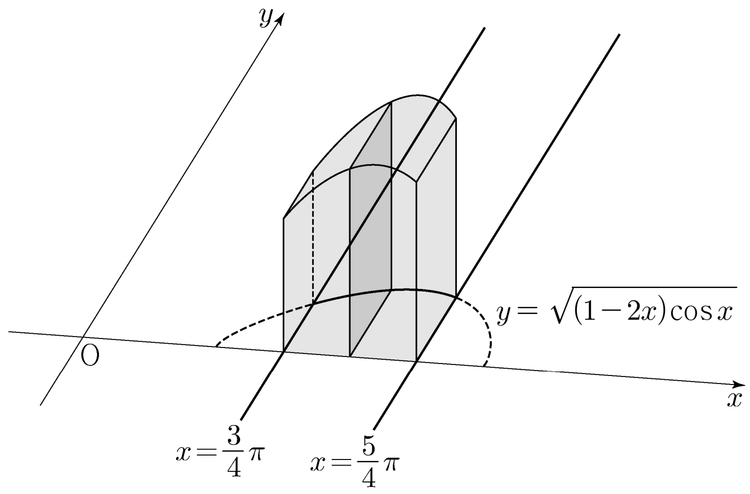
$\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left[\ln|f(x)|\right]_1^a$

$= \ln\left|\frac{f(a)}{f(1)}\right| = \ln\left(\frac{f(a)}{8}\right) = \ln\left|\frac{a^2(a+1)}{2}\right|$

$\therefore f(a) = 4a^2(a+1)$

$f(2) = 16\times3 = 48$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx$

$= (1-2x)\sin x\Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} 2\sin x\,dx$ 0

$= \left(1-\frac{5}{2}\pi\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1-\frac{3}{2}\pi\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

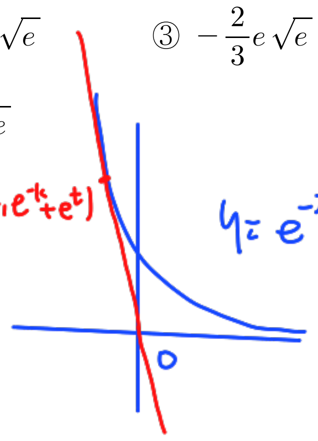
$= -\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\pi$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

$y=e^{-x}+e^t$

$y'=-e^{-x}$



$y=-e^{-k}(x-k)+e^{-k}+e^t$

$(0,0) \Rightarrow \quad 0=(k+1)e^{-k}+e^t$

$e^t=(-k-1)e^{-k}$

$t=a \rightarrow \ -e^{-k}=-e\sqrt{e}$, $k=-\frac{3}{2}$, $e^a=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}$

$e^t=\left(-e^{-k}+(k+1)e^{-k}\right)\frac{dk}{dt}$

$e^t=ke^{-k}\frac{dk}{dt}$

$f(t)=-e^{-k}$

$f'(t)=e^{-k}\frac{dk}{dt}=\frac{e^t}{k}$

$\begin{cases} t=a \\ k=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f'(a)=\frac{e^a}{k}=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다. 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

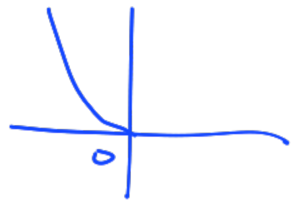
$$2g(t)+h(t)=k \ (k\text{는 상수})$$

$h(t)=k-2g(t)$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

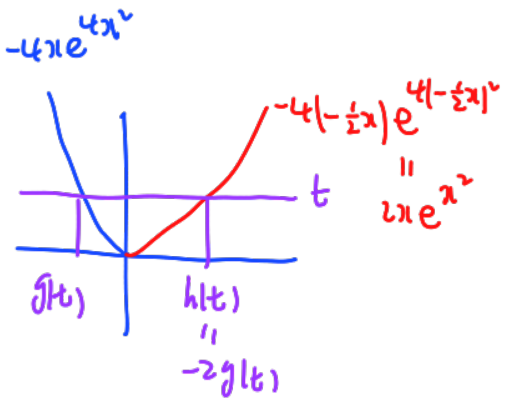
$f'=-4(e^{4x^2}+8x^2e^{4x^2})<0$ 감소



$\lim_{t\to0+}(\underbrace{2g(t)}_{0}+h(t))=\lim_{t\to0+}k$

$\therefore \lim_{t\to0+}h(t)=k$

$k=0$



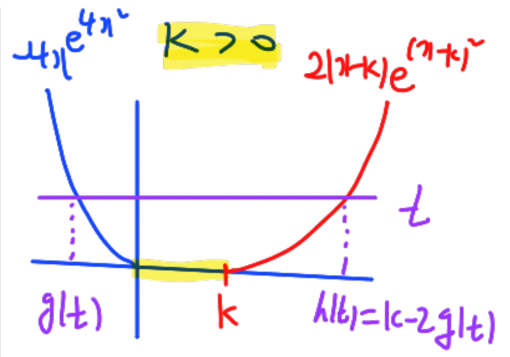
$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^7 2xe^{x^2}dx$

$x^2=t$, $2xdx=dt$

$\int_0^{\sqrt{7}} e^t dt=e^{\sqrt{7}}-1$

(X)

$k>0$



$\int_0^7 f(x)dx=\int_k^7 2(x-k)e^{(x-k)^2}dx$

$(x-k)^2=t$, $2(x-k)dx=dt$

$\int_0^{(7-k)^2} e^t dt$

$=e^{(7-k)^2}-1=e^4-1$

$7-k=2,-2$, $k<7$

$\therefore k=5$

$2(x-5)e^{(x-5)^2}$

$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{2\cdot4\cdot e^{16}}{2\cdot3\cdot e^9}=\frac{4}{3}e^7$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{162}$

$a_n = ar^{n-1}$

$b_n = bR^{n-1}$

$\frac{ab}{1-rR} = \left(\frac{a}{1-r}\right)\left(\frac{b}{1-R}\right)$

$-1<r<1$

$-1<R<1$

$1-rR = 1-r-R+rR$, $2rR = r+R$

$\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=2$

$3\times\sum_{1}^{\infty}|ar^{2n-1}| = 7\times\sum_{1}^{\infty}|ar^{3n-1}|$

$\frac{3|ar|}{1-r^2} = \frac{7|ar^2|}{1-|r^3|} \Rightarrow \frac{3}{1-r^2} = \frac{7|r|}{1-|r^3|}$

i) $r>0$ $\frac{3}{1-r^2} = \frac{7r}{1-r^3}$, $7r(1+r)=3(1+r+r^2)$

$7r+7r^2 = 3r^2+3r+3$

$4r^2+4r-3=0$

$2r \quad -1$

$2r \quad +3$

$r=\frac{1}{2} \to \frac{1}{R}=0$

(×)

ii) $r<0$ $\frac{3}{1-r^2} = \frac{-7r}{1+r^3}$, $-7r(1-r)=3(1-r+r^2)$

$-7r+7r^2 = 3-3r+3r^2$

$4r^2-4r-3=0$

$2r \quad 1$

$2r \quad -3$

$r=-\frac{1}{2}$

$R=\frac{1}{4}$

$\sum_{1}^{\infty}\frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = \sum_{1}^{\infty}(R^{n-1}+R^{2n+1})$

$= \frac{1}{1-R}+\frac{R^3}{1-R^2} = \frac{4}{3}+\frac{1}{60} = \frac{81}{60} = \frac{27}{20} = S$

$\therefore 120S = 162$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t)-g(t)\}\,dt$$

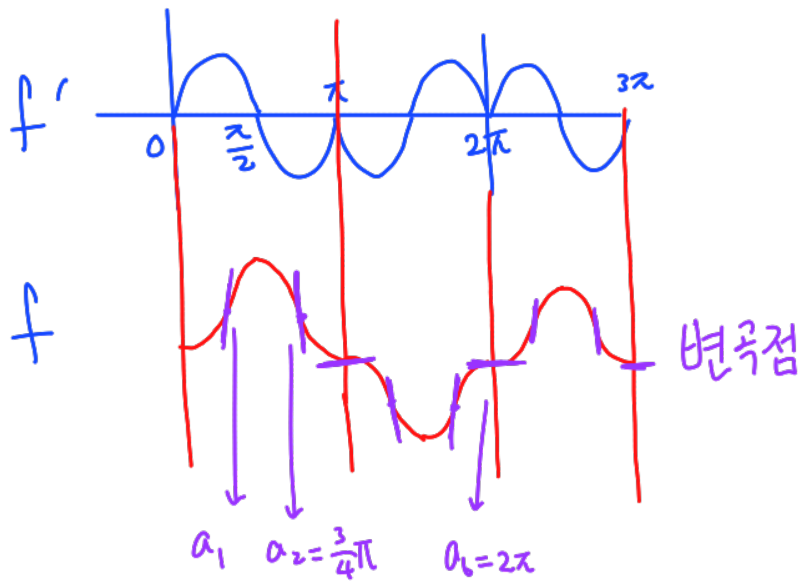
가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi}\times(a_6-a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{125}$

$\sin x>0 \to f' = \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\sin x<0 \to f' = -\sin x\cos x = -\frac{1}{2}\sin 2x$

$h'(x) = f(x)-g(x)$, $h'=0$ & 부호변화



$\frac{100}{\pi}\times\left(2\pi-\frac{3}{4}\pi\right) = 200-75 = 125$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 A$(a, -2, 6)$, B$(9, 2, b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4, 0, 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$a+9=8$, $a=-1$
$6+b=14$, $b=8$

24. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(\sqrt{3}, -2)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

$\frac{3}{a^2}+\frac{4}{6}=1$, $a^2=9$, $a=3$

$\frac{\sqrt{3}x}{9}+\frac{-2y}{6}=1$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\sim$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=17$

$= 44+9-4\vec{a}\cdot\vec{b}=17, \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=9$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 11+9-18 = 2$

$\therefore |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{2}$

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

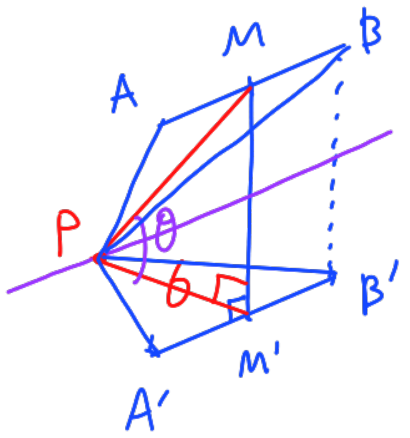
$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}} = 6$$

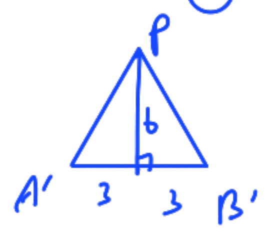
이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PM'}} \perp \overline{\mathrm{A'B'}}, \quad \overline{\mathrm{PM'}} = 6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24



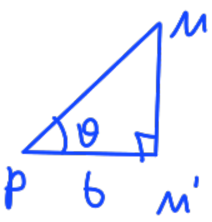


$\triangle PA'B' = \frac{1}{2}\times6\times6=18$

$\angle MPM' = \theta$

$18\cos\theta = \frac{9}{2}$

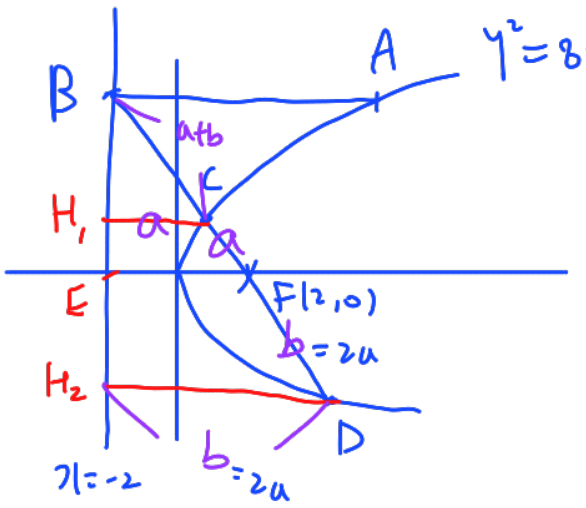
$\cos\theta = \frac{1}{4}$

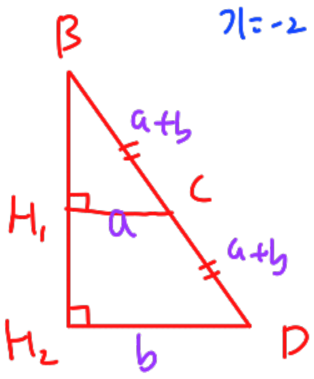


$\frac{6}{PM} = \frac{1}{4} \quad \therefore PM=24$

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{\mathrm{CF}}<\overline{\mathrm{DF}}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$ ④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$



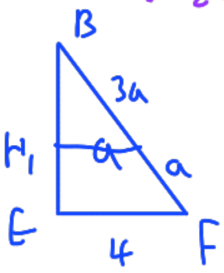


$CF = CH_1 = a$

$DF = DH_2 = b$

$CD = BC = a+b$

$DH_2 = 2CH_1 \quad \therefore b = 2a$



$a : 4 = 3a : 4a$

$\therefore a = 3,\ b = 6$

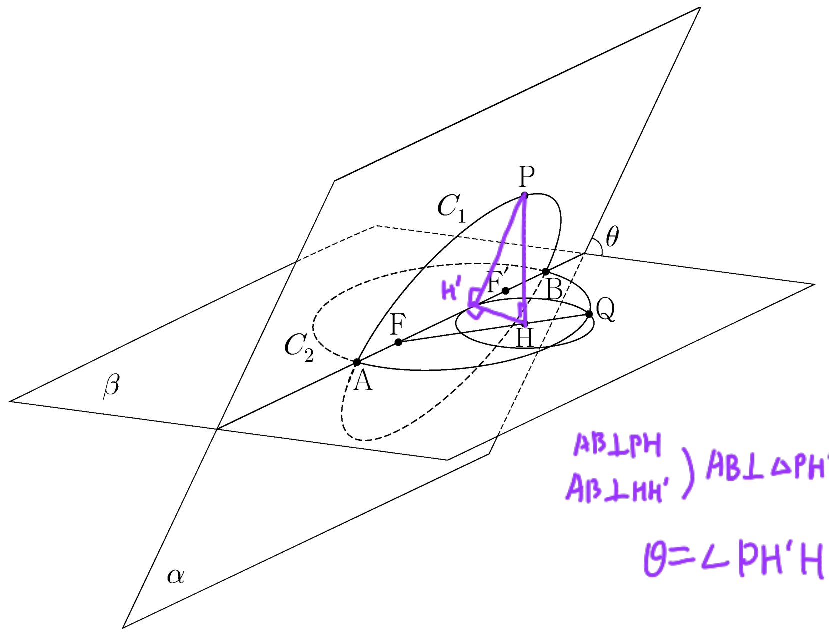
$B(-2, 8\sqrt{2})$ $\quad 128 = 8x,\ x = 16$

$A(16, 8\sqrt{2})$

$D(4, -4\sqrt{2})$

$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 18 \times 12\sqrt{2} = 108\sqrt{2}$

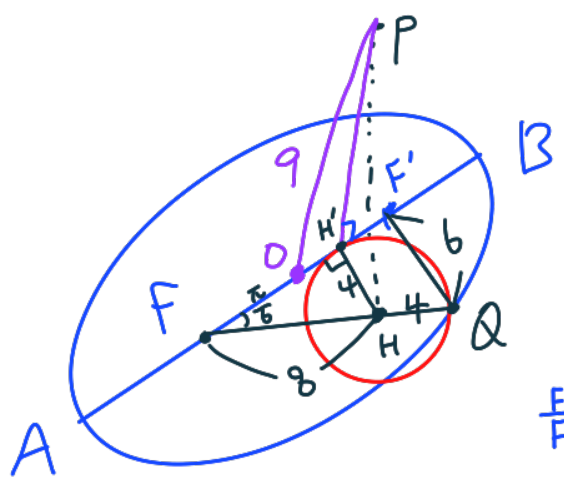
28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{HF'}}<\overline{\mathrm{HF}}$이고 $\angle \mathrm{HFF'}=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{FH}}<\overline{\mathrm{FQ}}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



$AB \perp PH$, $AB \perp HH'$) $AB \perp \triangle PH'H$

$\theta = \angle PH'H$

① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$



$FQ + QF' = 18$

$FH' = 4\sqrt{3}$

$F'Q : FQ = H'H : FH$

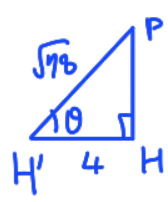
$\therefore \triangle FHH' \sim \triangle FQF'$

$\frac{F'Q}{FQ} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \quad \therefore \angle FF'Q = 90°$

$\overline{FF'} = 6\sqrt{3}$, $\overline{FH'} = 4\sqrt{3}$, $\overline{OF} = 3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{OH'} = \sqrt{3}$

$\triangle OH'P$에서 $\overline{PH'} = \sqrt{78}$

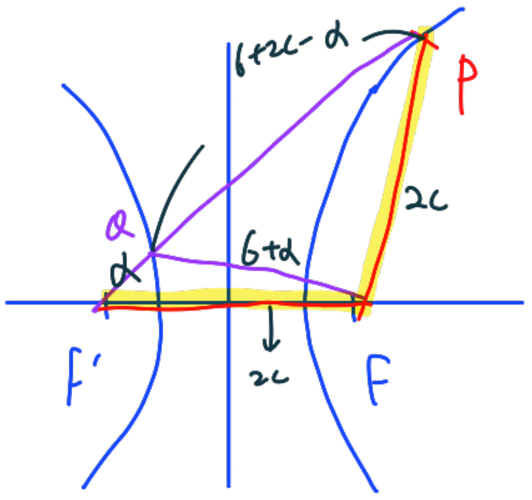


$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{78}} = \frac{2}{39}\sqrt{78}$

단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점] $\boxed{11}$

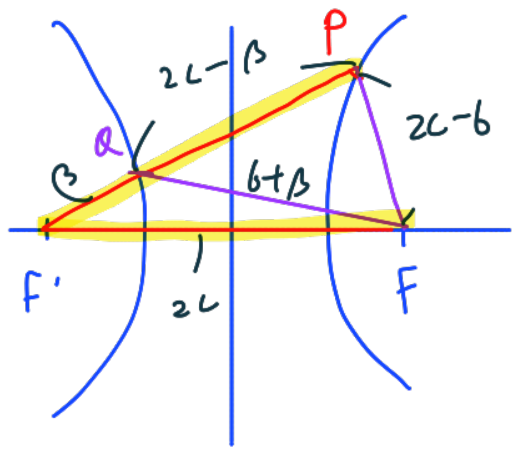
(가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
점 Q는 직선 PF′ 위에 있다.
(나) 삼각형 PF′F는 이등변삼각형이다.
(다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.



i) $PF=FF'$

$PQ+QF+FP$

$=12+4c=28,\ c=4$



ii) $PF'=FF'$

$PQ+QF+FP$

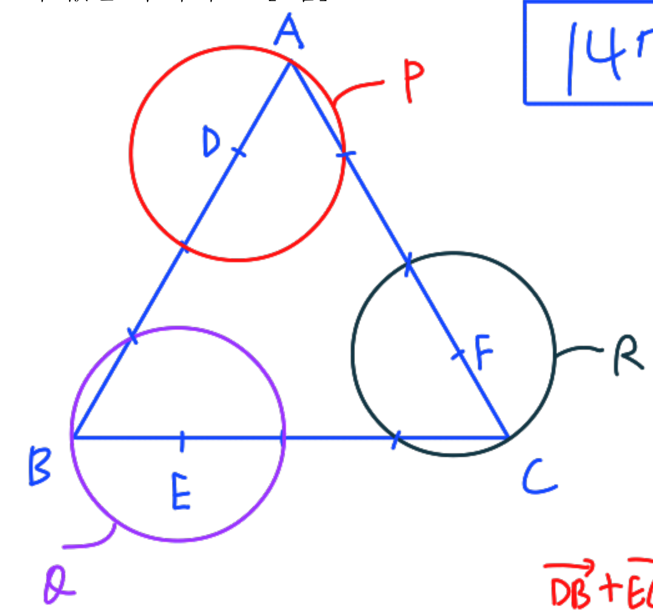
$=4c=28,\ c=7$

$\therefore 4+7=11$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{DP}|=|\overrightarrow{EQ}|=|\overrightarrow{FR}|=1$
(나) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{RA}$

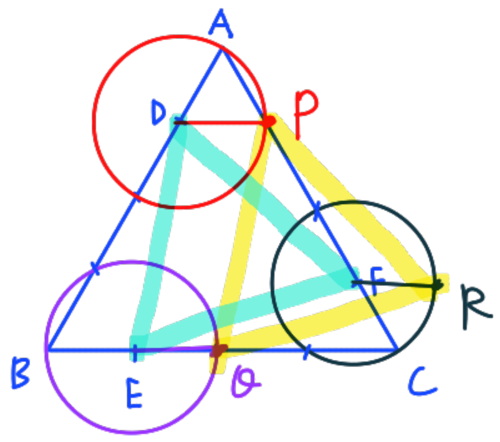
$|\overrightarrow{AX}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{147}$



$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{PD}+\cancel{\overrightarrow{DB}}+\overrightarrow{QE}+\cancel{\overrightarrow{EC}}+\overrightarrow{RF}+\cancel{\overrightarrow{FA}}$

$\overrightarrow{AX}=-(\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{FR})$, $(|\overrightarrow{AX}|$ 최대 $\Rightarrow \overrightarrow{DP}=\overrightarrow{EQ}=\overrightarrow{FR}$



$\triangle PQR=\triangle DEF$

$=\triangle ABC-3\times\triangle DBE$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times16-3\times\frac{1}{2}\times3\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=4\sqrt{3}-\frac{9}{4}\sqrt{3}=\frac{7}{4}\sqrt{3}=S$

$\therefore 16S^2=147$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.