2025학년도 대학수학능력시험 대비

제 2 교시

랑데뷰 DailyTest (5)

[랑데뷰 데테]는 8번, 19번, 27번급의 [3점] 문항과 12번, 13번, 20번, 28번, 29번급의 [4점] 문항으로 구성된 수학 일일학습지이다.

[제작자 : 황보백T]
[for M25]

수학Ⅰ

1. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n : a_{n+1} = 1 : 8$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} pa_k = a_{21} - a_1$일 때, 상수 p의 값은? (단, $a_1 \neq 0$) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

2. 함수 $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ $(0 \leq x \leq 5\pi)$의 그래프와 직선 $y = 1$의 교점들의 집합을 S라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 중에서 집합 S에 속하지 않는 한 점과 집합 S에 속하는 서로 다른 두 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이의 최댓값은? [4점]

① $\frac{16}{3}\pi$ ② 6π ③ $\frac{20}{3}\pi$ ④ $\frac{22}{3}\pi$ ⑤ 8π

수학II

3. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2-2x+1$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1,\ x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② 2 ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ 4

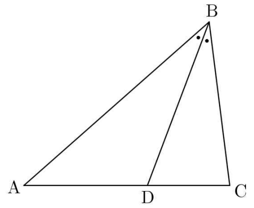
4. 최고차항의 계수가 1이고 최솟값이 -1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_1^x \{f(1)-f(t)\}\,dt$$

라 하자. $g(1)=g(4)$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

미적분

5. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\angle ABC$의 이등분선이 변 AC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD}:\overline{DC}=3:2$이고, $\angle BCA=2\angle CAB$이다. $\angle CAB=\alpha$라 할 때, $\cos\alpha$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$ [3점]



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

6. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0 \le x < \ln 2) \\ g(e^x-1)+e^{x+\ln 4} & (\ln 2 \le x \le \ln 4) \end{cases}$

(나) $\int_1^4 g(x)dx=70$

$\int_0^{\ln 2} e^x f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

확률과통계

7. 콜라 맛 사탕 2개, 커피 맛 사탕 2개, 홍차 맛 사탕 3개를 여학생 2명과 남학생 5명에게 임의로 1개씩 남김없이 나누어 줄 때, 여학생 2명이 서로 다른 맛의 사탕을 받을 확률은? (단, 사탕을 받지 않은 학생은 없다.) [3점]

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{16}{21}$ ③ $\frac{17}{21}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{19}{21}$

8. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 X로의 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $f(1)< f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5) \le f(6)$
(나) $f(1)\times f(6)= f(2)\times f(4)$

[빠른답]

1	③	2	②	3	③	4	3
5	②	6	4	7	②	8	17

[풀이]

1) 정답 ③

$a_n : a_{n+1} = 1:8$에서 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 8a_n$을 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 8인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{20} pa_k = p\sum_{k=1}^{20} a_k$$
$$= p\times\frac{a_1(8^{20}-1)}{8-1}$$
$$= \frac{p}{7}\times a_1(8^{20}-1)$$

이고,

$a_{21} - a_1 = a_1\times 8^{20} - a_1 = a_1(8^{20}-1)$이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} pa_k = a_{21} - a_1$에서

$\frac{p}{7}\times a_1(8^{20}-1) = a_1(8^{20}-1)$

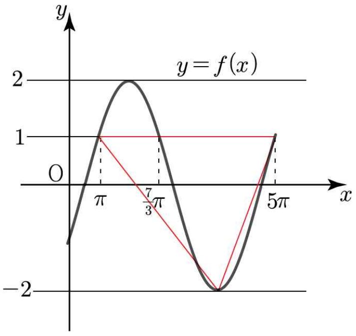
이때, $a_1 \neq 0$이므로 $\frac{p}{7} = 1$, $p = 7$

2) 정답 ②

[그림 : 이호진T]

함수 $f(x)$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$이고, 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

또한, 함수 $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 함수 $y = 2\sin\frac{x}{2}$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 1$이 만나므로

$2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$에서

$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

곧, $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$의 값이 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{13}{6}\pi$,이므로

$S = \left\{(\pi,\ 1),\ \left(\frac{7}{3}\pi,\ 1\right),\ (5\pi,\ 1)\right\}$

집합 S에 속하는 두 점 사이의 거리의 최댓값은

$5\pi - \pi = 4\pi$

한편, 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이고, 최솟값은 -2이므로 집합 S에 속하지 않는 한 점을 꼭짓점으로 하고 S에 속하는 두 점을 연결한 선분을 밑변으로 하는 삼각형의 높이의 최댓값은 $1-(-2) = 3$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 4\pi\times 3 = 6\pi$

3) 정답 ③

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$이므로

$f(x) = \int(3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + C$ (C는 적분상수)

$f(1) = 0$이므로

$1 + C = 0$에서 $C = -1$

$\therefore\ f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

한편 $f'(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$f(1) = 0$이므로 $x \leq 1$에서 $f(x) \leq 0$이다.

따라서 구하는 넓이는

$$-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 + x - 1)\,dx$$
$$= -\int_{-1}^{1}(-x^2 - 1)\,dx$$
$$= 2\times\int_{0}^{1}(x^2 + 1)\,dx$$
$$= 2\times\left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1$$
$$= \frac{8}{3}$$

4) 정답 3

$g(x) = \int_1^x \{f(1) - f(t)\}dt$에 $x = 1$을 대입하면 $g(1) = 1$

$g(x) = \int_1^x \{f(1) - f(t)\}dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x) = f(1) - f(x)$ …… ㉠

$g'(1) = f(1) - f(1) = 0$

조건에서 $g(4) = g(1) = 0$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로 ㉠에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

$g(1) = 0$, $g'(1) = 0$, $g(4) = 0$이므로

$g(x)=-\frac{1}{3}(x-1)^2(x-4)$이고, $g'(x)=-(x-1)(x-3)$이다.

㉠에서

$f(x)=-g'(x)+f(1)=(x-1)(x-3)+f(1)$

$\quad=x^2-4x+3+f(1)$

이고 $f'(x)=2x-4=2(x-2)$이다.

$f'(x)=0$에서 $x=2$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이다.

이차함수 $f(x)$의 최솟값이 -1이므로 $f(2)=4-8+3+f(1)=-1$

$\therefore\ f(1)=0$

$\therefore\ f(x)=x^2-4x+3$

따라서 $f(4)=3$이다.

5) 정답 ②

$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$이므로 $\angle\mathrm{BCA}=2\alpha$이다.

$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{DBC}=\beta$라 하고, $\overline{\mathrm{AD}}=3k$, $\overline{\mathrm{CD}}=2k$ (k는 양수)라 하면

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{3k}{\sin\beta}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}$ …… ㉠

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2k}{\sin\beta}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin2\alpha}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{3k}{\sin\beta}\times\sin\alpha=\frac{2k}{\sin\beta}\times\sin2\alpha$

$\frac{3}{2}=\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{3}{2}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\therefore\ \cos\alpha=\frac{3}{4}$

6) 정답 4

조건 (가)에서 $e^x=t$라 하면

$g(t)=\begin{cases}f(\ln t) & (1\le t<2)\\ g(t-1)+4t & (2\le t\le4)\end{cases}$이므로

$\int_1^4 g(x)\,dx$

$=\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^3 g(x)\,dx+\int_3^4 g(x)\,dx$

$=\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^3\{g(x-1)+4x\}\,dx+\int_3^4\{g(x-1)+4x\}\,dx$

$=\int_1^2 g(x)\,dx+\left\{\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^3 4x\,dx\right\}+\left\{\int_2^3 g(x)\,dx+\int_3^4 4x\,dx\right\}$

$=2\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^4 4x\,dx+\int_2^3\{g(x-1)+4x\}\,dx$

$=3\int_1^2 g(x)\,dx+\int_2^4 4x\,dx+\int_2^3 4x\,dx$

$=3\int_1^2 g(x)\,dx+34$

이때 $\int_1^2 g(x)\,dx=\int_1^2 f(\ln x)\,dx$에서

$\ln x=u$라 하면 $x=1$일 때 $u=0$, $x=2$일 때 $u=\ln2$이고

$\frac{dx}{du}=x=e^u$이므로

$\int_1^2 f(\ln x)\,dx=\int_0^{\ln2}e^u f(u)\,du=\int_0^{\ln2}e^x f(x)\,dx$이다.

$=3\int_0^{\ln2}e^x f(x)dx+34=70$

$\therefore\ \int_0^{\ln2}e^x f(x)\,dx=4$

7) 정답 ②

7명이 3종류의 사탕을 나누어 받는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3=\frac{7\times6}{2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1}\times1=210$

여학생 2명이 서로 다른 맛의 사탕을 받는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은 같은 맛의 사탕을 받는 사건이다.

여학생 2명이 같은 맛의 사탕을 받는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2$

$=\frac{5\times4}{2\times1}\times1+\frac{5\times4}{2\times1}\times1+5\times\frac{4\times3}{2\times1}\times1$

$=10+10+30=50$

이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{50}{210}=\frac{5}{21}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$

8) 정답 17

$f(1)<f(2)$이므로

① $f(1)=1$, $f(6)=6$이면 $f(2)=2$, $f(4)=3$이므로

곧 $1<2\le f(3)\le3\le f(5)\le6$

이때 $f(3)$은 2, 3 중 하나이고 $f(5)$는 3, 4, 5, 6 중 하나이므로 함수 f의 개수는 $2\times4=8$

② $f(1)=1$, $f(6)=4$이면 $f(2)=2$, $f(4)=2$이므로

곧, $1<2\le f(3)\le2\le f(5)\le4$

이때 $f(3)=2$이고 $f(5)$는 2, 3, 4 중 하나이므로 함수 f의 개수는 $1\times3=3$

③ $f(1)=2$, $f(6)=6$이면 $f(2)=3$, $f(4)=4$이므로

곧 $2<3\le f(3)\le4\le f(5)\le6$

이때 $f(3)$은 3, 4 중 하나이고 $f(5)$는 4, 5, 6 중 하나이므로 함수 f의 개수는

$2\times3=6$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$8+3+6=17$