

5월 모의고사 완벽 분석서 : 총평 및 전략수립

I. 이번 5월 모의고사, 얼마나 어려웠나요?

1. 등급컷으로 보는 시험 난이도

이번 5월 모의고사의 1등급컷은 확률과 통계 77점, 미적분 71점, 기하 73점(ebsi 기준)으로 수치상으로는 매우 어려웠던 시험이 맞습니다. 물론 N수생들의 유입을 생각해보면, 시험의 전반적인 난이도는 작년 수능과 비슷하거나 약간 더 어려웠던 시험이라고 생각됩니다.

2. TEAM 수리남이 본 시험 난이도

시험지 전체적으로 난이도 높은 문항들이 분포되어있는 것은 사실입니다. 하지만 22번 문항을 제외하고는, 소재적으로나, 내용적으로 **기본과 기출을 벗어난 문항은 없었습니다**. 지금 수능 수학의 기초는 수학을 잘하는 '진짜' 상위권 학생들에게는 매우 유리한 기초입니다. 이 학생들은 일반적인 학생들이 어려워하고 시간을 많이 쓰는 앞 부분의 준킬러 문제들은 기출, 사설에서 자주 나오던 소재의 변형 문항 정도로만 생각하기 때문이죠. 쓴소리를 해서 미안하지만, **이번 시험 성적이 잘 안 나왔다면, 시험의 난이도만 탓할 것이 아닌, 스스로의 상태를 객관적으로 돌아봐야 할 것입니다.**

II. 이러한 기초의 수능, 모의고사 어떻게 대비해야 할까요?

1. 킬러 문항 문제풀이를 철저히 하세요.

좀 의아하게 생각할 학생들이 많을 것이라고 생각합니다. '준킬러 문항 위주로 출제되는 시험인데, 킬러대비를 하라고?', '나는 준킬러 대비를 열심히 해서, 킬러 버리고 준킬러 다 맞춰서 1등급 받을건데?' 등의 생각을 하고 있겠죠. 왜 킬러 문항을 열심히 해야 하는지 설명해보겠습니다.

선택 과목이 생기고 지금까지 평가원 모의고사, 수능의 기초를 살펴보면, 다들 알다시피 킬러 문항의 난이도는 떨어졌고, 앞 번호 문항들의 전반적인 난이도가 올라갔습니다. 이때, 난이도를 올린 방식이 기존에 없던 새로운 소재와 내용의 문항을 배치하는 것이 아닌, **예전 기출, 사설 킬러 문항에서 사용된 소재들을 그대로 가져와, 호흡을 줄이는 방식의 문항들을 배치하는 방식**을 선택했습니다. 따라서 이런 킬러 문항들을 열심히 대비한 학생들은, 이런 문제들을 어렵게 생각하지 않고 풀어낼 수 있는 것입니다. 또한 여전히 신선한 소재와 높은 사고력을 요하는 문항이 1~2문제 정도는 꾸준히 출제되고 있어, 단순 1등급을 넘어선 고득점을 받기 위해서도 **킬러 문항의 대비는 필수적**입니다.

이번 수능의 기초는 6월 모의고사 문제지가 나와봐야 더 정확하게 예측이 가능하겠지만, 여전히 지금의 기초를 유지할 것으로 예상됩니다. 물론 기초가 바뀌더라도, **수능 수학 고득점은 결국 기출 분석과 사고력 싸움**입니다. 어려운 문항을 오래 고민하고 풀어내는 것만큼 사고력 향상의 도움이 되는 것은 없습니다.

2. 문제 상황별 태도 정리(기출분석)를 꼭 하세요.

어떤 문제가 나왔을 때 **자신만의 명확한 기준**이 꼭 있어야 합니다. 예를들어, 이번 시험에서 오답률이 매우 높았던 문항인 21번을 보면, 수능 도형 문제가 나왔을 때, 기본적으로 취해야 하는 태도를 벗어나지 않습니다. 도형 문항이 나왔을 때, 상황별로 태도가 명확하게 정립되어 있다면, 어렵지 않게 풀어낼 수 있었던 문항입니다.

학생들은 기출분석 방법을 명확하게 모르는 경우가 많습니다. **기출분석은 단순히 기출을 반복적으로 많이 풀어보는 것을 넘어서 진행되어야 합니다.** 기출문제를 풀면서, 문항에서 얻어갈 수 있는 태도, 기준, 실전개념들을 확실히 정리하고, 이를 사설 문항을 풀 때, 앞으로의 모의고사를 풀 때에도 적용할 수 있어야 합니다. 저는 수험생 때 어떤 문제를 보면, 연관 기출문제의 번호들이 떠오를 정도로 기출분석을 진행했습니다.

5월 모의고사 완벽 분석서 : 코멘트 및 유사문항(공통)

11. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 자연수 m ($m \geq 3$)이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1 - b_1| = 5$

(나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^m a_k = 9$ 일 때, $\sum_{k=1}^m b_k$ 의 값은? [2024년 5월 모의고사 11번]

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

TEAM 수리남's TIP

a_n 과 b_n 이 등차수열일 때, $a_n + b_n$, $a_n - b_n$ 도 등차수열이다. 문제에서 반복적으로 $a_n - b_n$ 에 대한 조건을 제시하고 있으므로, $a_n - b_n = c_n$ 이라는 새로운 등차수열을 생각해볼 수 있다.

TEAM 수리남's 핵심노트

두 등차수열, 등비수열의 조합

1) a_n 이 공차가 d_1 인 등차수열, b_n 이 공차가 d_2 인 등차수열일 때

$a_n + b_n$ 은 공차가 $d_1 + d_2$ 인 등차수열, $a_n - b_n$ 은 공차가 $d_1 - d_2$ 인 등차수열

2) a_n 이 공비가 r_1 인 등비수열, b_n 이 공비가 r_2 인 등비수열일 때

$a_n \times b_n$ 은 공비가 $r_1 \times r_2$ 인 등비수열, $a_n \div b_n$ 은 공비가 $\frac{r_1}{r_2}$ 인 등비수열

유사문항 1. $a_2 = -4$ 이고, 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 을 $b_n = a_n + a_{n+1}$ ($n \geq 1$)이라 하고, 두 집합 A, B 를

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B) = 3$ 이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{20} 의 합은?

[2024학년도 6월 모의고사 12번]

① 30

② 34

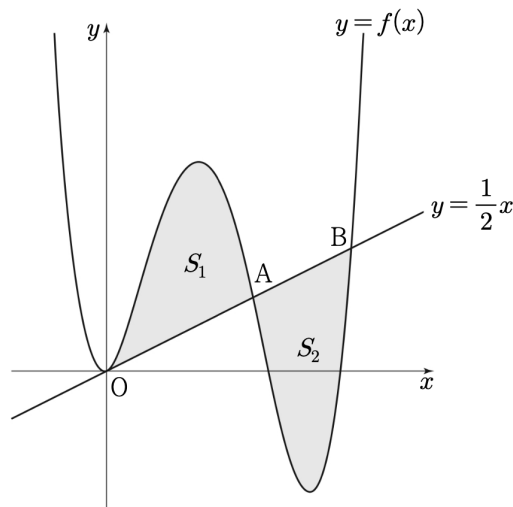
③ 38

④ 42

⑤ 46

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 가 원점 O 에서 접하고 x 좌표가 양수인 두 점 $A, B(\overline{OA} < \overline{OB})$ 에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 OA 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 AB 로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2 라 하자. $\overline{AB}=\sqrt{5}$ 이고, $S_1=S_2$ 일 때, $f(1)$ 의 값은? [2024년 5월 모의고사 12번]

- ① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$



TEAM 수리남's TIP

이런 문항이, 진짜 수학을 잘하는 상위권과 일반적인 학생의 차이가 나타나는 문항이다. **기본적인 풀이**는 두 함수의 교점이 주어져 있으므로 두 함수의 차를 인수정리를 이용해 구할 수 있고, 기울기와 선분의 길이를 보고, A와 B의 x 좌표가 각각 $a, a+2$ 라는 것을 알아낸 뒤 $\int_0^{a+2} \left\{ f(x) - \frac{1}{2}x \right\} dx = 0$ 이라는 것을 이용하면 된다.

TEAM 수리남's TIP

상위권 학생이라면, 두 넓이가 같다는 것을 보고 $f(x) - \frac{1}{2}x$ 의 원함수를 그릴 수 있었을 것이다.

왜냐하면 '도함수의 정적분 = 함수값의 차' 이므로 정적분 값이 0이 된다는 것은 원함수의 함수값의 차이가 0이 되므로, 원함수를 쉽게 구할 수 있기 때문이다. 이와 함께, 다항함수의 비율관계를 이용한다면, 문제를 매우 빠르게 풀어낼 수 있다.

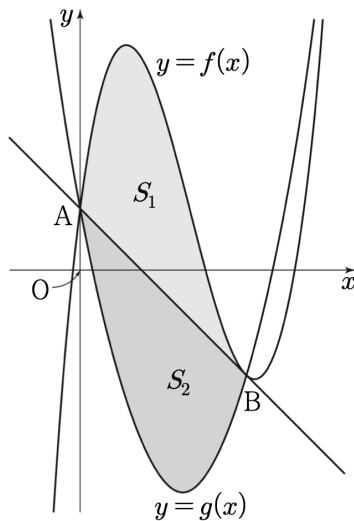
$(x-a)^m(x-b)^n$ 극점의 x 좌표(비율관계)

$(x-a)^m(x-b)^n$ 의 극점의 x 좌표는 a 와 b 의 $m:n$ 내분점이다.

유사문항 1. 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 1$ 의 그래프와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $A(0, 1)$, 점 $B(k, f(k))$ 에서 만나고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 B 에서의 접선이 점 A 를 지난다.

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 = S_2$ 일 때, $\int_0^k g(x)dx$ 의 값은?(단, k 는 양수이다.)

[2023년 4월 모의고사 12번]



① $-\frac{17}{2}$

② $-\frac{33}{4}$

③ -8

④ $-\frac{31}{4}$

⑤ $-\frac{15}{2}$

13. 두 상수 $a, b(b > 0)$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+3} + b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5} + 3b & (x > a) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값이 $4b+8$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

[2024년 5월 모의고사 13번]

$b < t < k$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다.

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

TEAM 수리남's TIP

개형추론의 기본은 특수한 상황부터 체크하면서, 문제 조건을 제대로 이해하고, 문제가 원하는 상황을 빠르게 찾아내는 것이다. 이 문제는 점근선이 존재하는 문제로, **점근선의 위치에 따라 교점의 개수가 변하는 소재**로, 자주 등장하는 소재이므로 잘 알아두도록 하자.

유사문항 1. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값은?

[2024학년도 수능 14번]

① 51

② 52

③ 53

④ 54

⑤ 55

유사문항 2. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+a} + b & (x \leq -8) \\ -3^{x-3} + 8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은?

집합 $\{f(x) \mid x \leq k\}$ 의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k 의 값의 범위는 $3 \leq k < 4$ 이다.

[2024학년도 9월 모의고사 14번]

① 11

② 13

③ 15

④ 17

⑤ 19

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 y 절편을 $g(t)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

$$|f(k)|+|g(k)|=0\text{을 만족시키는 실수 }k\text{의 개수는 2이다.}$$

$4f(1)+2g(1)=-1$ 일 때, $f(4)$ 의 값은? [2024년 5월 모의고사 14번]

① 46

② 49

③ 52

④ 55

⑤ 58

TEAM 수리남's TIP

$$'|a|+|b|=0\text{이면 }a=b=0\text{이다.}'$$

위 명제는 매우 유명한 소재이기 때문에 꼭 기억하도록 하자.

유사문항 1. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \int_0^x (x-2)f(s)ds$$

라 하자. 실수 t 에 대하여 직선 $y=tx$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 개수를 $h(t)$ 라 할 때,
다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(4)$ 의 값의 합을 구하시오.

[2022학년도 사관학교 22번]

15. 첫째항이 자연수인 수열 a_n 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{3} & (a_n \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \\ \frac{a_n^2 + 5}{3} & (a_n \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4 + a_5 = 5$ 가 되도록 하는 모든 a_n 의 값의 합은? [2024년 5월 모의고사 15번]

① 63

② 66

③ 69

④ 72

⑤ 75

TEAM 수리남's TIP

24학년도 수능 15번 변형 문항이다.

만약 문제에 접근조차 하지 못했다면, 규칙을 역으로 적용하는 방식이 떠오르지 않을 수도 있다.

하지만 처음부터 아이디어가 떠오르지 않았어도 반드시 해봐야하는 것은 **일단 대입해보는** 일이다.

특히 이런 복잡한 점화식의 경우 반드시 식에 실제 숫자를 대입해봐야 규칙성이 드러나는 경우가 많다.

유사문항 1. 첫째항이 자연수인 수열 a_n 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 + a_7 = 3$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [2024년 5월 모의고사 15번]

① 139

② 146

③ 153

④ 160

⑤ 167

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 k ($k \neq 0$) 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = k$$

일 때, k 의 값을 구하시오. [2024년 5월 모의고사 20번]

TEAM 수리남's TIP

다항함수의 항등식을 봤을 때 취해야 할 태도

① 차수 비교해보기

: 항등식이라는 것은 $-2x^2 = -2x^2$ 처럼 완전히 같은 꼴을 전제로 하기 때문에 $f(x)$, $g(x)$ 등이 섞여 있으면 가장 먼저 양변의 최고차항부터 비교해보자.

② 특징적인 항 찾아내기

: 상수항이 몇이다, 또는 상수항이 없다 등 특징적인 조건이 보이면 그 특징을 통해 힌트를 얻는다.

TEAM 수리남's TIP

14번 문항도 마찬가지이고, 최근 이런 고1 수학 내용이 강조되는 경향이 있다. 고1 수학이 부족하다고 느끼는 학생들은 다시 고1 수학을 복습하거나, 최대한 많은 문제를 풀면서 고1 수학 관련 내용을 최대한 정리하며 구멍을 매꿔야한다.

유사문항 1. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x} = 2$ 를 만족시킬 때,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 값은? [2014년 10월 모의고사 수학 A형 10번]

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

유사문항 2. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x) + g(x)\} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$ 의 값은? [2020학년도 수능완성 수능 나형]

① -8

② -7

③ -6

④ -5

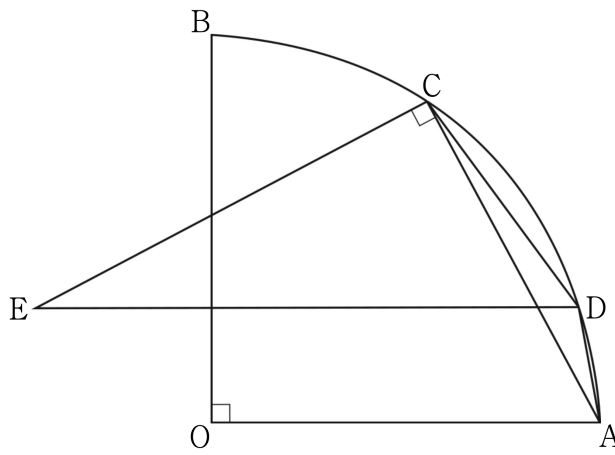
⑤ -4

21. 그림과 같이 중심이 O , 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB 가 있다.

호 AB 위에 점 C 를 $\overline{AC}=4\sqrt{2}$ 가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D 에 대하여 점 D 를 지나고 선분 OA 에 평행한 직선과 점 C 를 지나고 선분 AC 에 수직인 직선이 만나는 점을 E 라 하자.

삼각형 CED 의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{AD}=p+q\sqrt{7}$ 을 만족시키는 두 유리수 p, q 에 대하여 $9 \times |p \times q|$ 의 값을 구하시오. (단 점 D 는 점 A 도 아니고 점 C 도 아니다.)

[2024년 5월 모의고사 21번]



TEAM 수리남's TIP

이 문항이 어려웠던 학생은 무조건 도형 관련 수능문항을 꼭 풀어보면서, 상황별로 자신이 취해야 할 태도와 기준을 정해놓아야 한다.

원이 포함된 도형문제

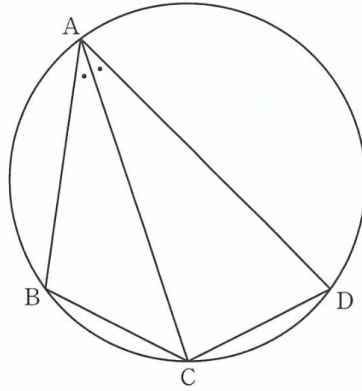
원이 나왔을 때 반드시 생각해야하는 것들이 있다.
아래 몇 가지 사항은 반드시 기억해두자.

- 1) 현 → 수선 내리기
- 2) 원 위의 점 → 중심과 잇기
- 3) 원주각 → 중심각 찾기
- 4) 외접원 → sine 법칙
- 5) 원 밖의 점 → 접선

유사문항 1. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC = \angle CAD$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

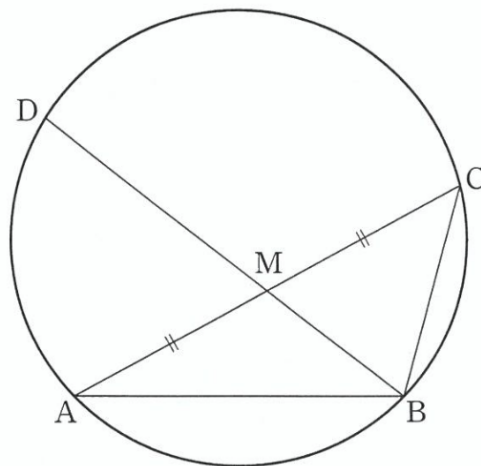
[2023학년도 수능 11번]



- ① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

유사문항 2. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC} > 3$ 이고 $\cos(\angle BAC) = \frac{7}{8}$ 인

삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [2023학년도 6월 모의고사 10번]



- ① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

22. 최고차항의 계수가 4이고, 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$ 와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x) = \begin{cases} 4x+2 & (x < a) \\ -2x-3 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$|g(x)| = f(x), \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(x+t) - g(x)}{t} = |f'(x)| \text{이다.}$$

(나) 함수 $g(x)h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다,

$g(0) = \frac{40}{3}$ 일 때, $g(1) \times h(3)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

[2024년 5월 모의고사 22번]

TEAM 수리남's TIP

실전에서는 주로 특수한 상황에서 답이 등장하므로, 특수한 상황을 먼저 분석해 답을 결정하고, 일반적인 상황을 검증하는 연습을 해봅시다. 물론, 특수한 상황에서 답이 등장하지 않을 수도 있지만, 특수한 상황을 정해놓고 보면, 문제 상황을 더욱 쉽고 정확하게 이해할 수 있습니다.

시험장에서는 특수한 경우만 조사해서 답을 냈더라도, 꼭 연습할 때는 일반적인 경우가 왜 안 되는지 검증해보는 태도를 가져야 합니다. 일반적인 경우가 왜 안 되는지 검증하는 과정이 문제해석능력, 수학적 사고력, 추론 등의 여러 능력을 기르는데 큰 도움이 될 것입니다.

곱함수의 연속

두 함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속일 때 , 아래와 같이 3가지 경우가 나올 수 있다.

- 1) $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속, $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속
 $\rightarrow g(a)=0$
- 2) $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 불연속, $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속
 $\rightarrow h(a)=0$
- 3) $g(x), h(x)$ 모두 $x=a$ 에서 불연속
 \rightarrow '연속'의 정의를 활용하자. ($\lim_{x \rightarrow a^-} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x)h(x) = g(a)h(a)$)

$$g(a-)h(a-) = g(a+)h(a+) = g(a)h(a)$$

유사문항 1. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 사차방정식

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$ 라 하자. 다항함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^4} = 0$

(나) $g(3) = -6$

함수 $f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$ 의 값은? [2017년 7월 모의고사 B형 21번]

유사문항 2. 두 함수 $f(x) = \begin{cases} x+a & (x < -1) \\ 2x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$, $g(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 값의 합은? [2025학년도 수능특강]

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

5월 모의고사 완벽 분석서 : 코멘트 및 유사문항(미적)

28. 두 상수 $a(a > 0)$, b 에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 를

$$f(x) = a \sin x - \cos x, \quad g(x) = e^{2x-b} - 1$$

이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$ 의 값은? [4점]

(가) $f(k) = g(k) = 0$ 을 만족시키는 실수 k 가 열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에 존재한다.

(나) 열린구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 방정식 $[f(x)g(x)]' = 2f(x)$ 의 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

⑤ $\frac{9}{2}$

[2024년 5월 모의고사 28번]

TEAM 수리남's TIP

$g'(x) = 2e^{2x-b} = 2(g(x)+1)$ 를 써야 쉽게 풀 수 있는 문제이다. 지수함수를 미분했을 때, 자기 자신의 꼴이 반복되므로, 이와 같은 꼴이를 할 줄 알아야 한다. 이 또한 자주 쓰이는 소재이므로 알아두도록 하자.

유사문항 1. k 가 자연수일 때, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$\cos^2 x \times e^{k \tan x} + a \cos^2 x \geq a$$

가 성립하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 $f(k)$ 라 하자. $\sum_{k=1}^8 f(x)$ 의 값은?

[EBS 모의고사]

① $43e^2$

② $45e^2$

③ $47e^2$

④ $49e^2$

⑤ $51e^2$

유사문항 2. $x > 0$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\cos^2 x}{x^2}$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 작은 것부터 크기순으로 모두 나열할 때, n 번째 수를 x_n 이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[EBS 모의고사]

ㄱ. 모든 자연수 n 에 대하여 $\tan x_{2n} = -\frac{1}{x_{2n}}$

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n} - x_{2n-1}) = \frac{\pi}{2}$

ㄷ. 모든 자연수 n 에 대하여 방정식 $f(x) = f(x_{2n})$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $2n$ 이다.

① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

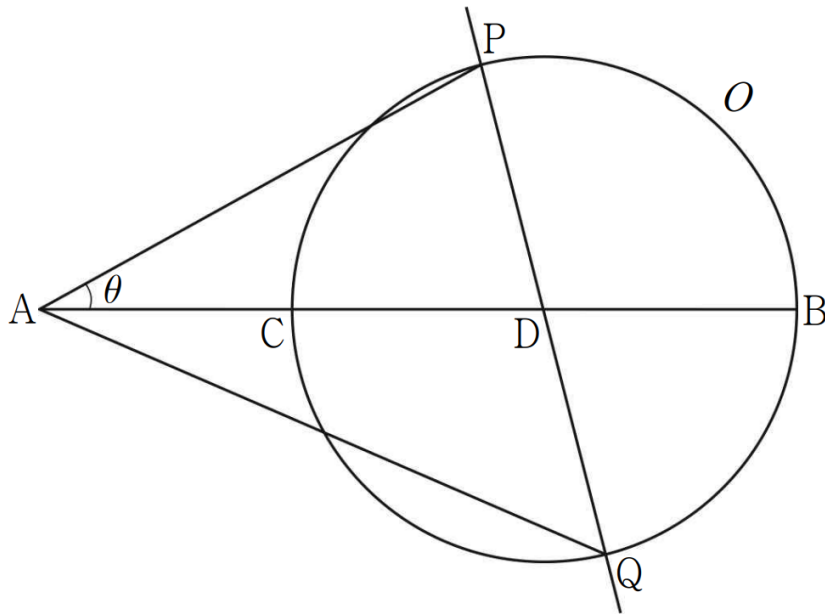
③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB 를 삼등분하는 점 중 A 와 가까운 점을 C , B 와 가까운 점을 D 라 하고, 선분 BC 를 지름으로 하는 원을 O 라 하자. 원 O 위의 점 P 를 $\angle BAP = \theta (0 < \theta < \frac{\pi}{6})$ 가 되도록 잡고, 두 점 P, D 를 지나는 직선이 원 O 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. 선분 AQ 의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때, $\cos \theta_0 = \frac{7}{8}$ 인 θ_0 에 대하여 $f'(\theta_0) = k$ 이다. k^2 의 값을 구하시오. (단, $\angle APD < \frac{\pi}{2}$ 이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$ 이다.)

[4점]



[2024년 5월 모의고사 29번]

TEAM 수리남's TIP

새로운 변수를 임의로 도입해도 기존의 변수와의 **관계식**이 있으면, 그 관계 속에서 기존의 변수와 함께 움직이기 때문에 **자유롭게** 사용해도 상관이 없다. 21번과 마찬가지로 이 문항이 어려웠던 학생은 무조건 도형 관련 수능문항을 꼭 풀어보면서, 상황별로 자신이 취해야 할 태도와 기준을 정해놓아야 한다. 이 문항을 사인법칙 뿐 아니라, 중선이 많이 나오므로, 중선 정리를 활용해서도 한 번 풀어보자.

30. 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 0인 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$ 을 모든 자연수 n 에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n| < \alpha) \end{cases} \quad (\alpha \text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 과 자연수 p 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$

(나) $\sum_{n=1}^m \frac{a_n}{b_n}$ 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m 은 p 이고, $\sum_{n=1}^p b_n = 51$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$ 이다.

$32 \times (a_3 + p)$ 의 값을 구하시오.

[2024년 5월 모의고사 30번]

TEAM 수리남's TIP

$|a_n|$ 의 값 범위에 따라 b_n 이 결정되기 때문에, $|a_n|$ 라는 수열에 대해 생각해봐야하고, a_n 이 등비수열이라면 $|a_n|$ 은 첫 항과 공비가 모두 양수인 등비수열임을 알 수 있다. 이제 문제가 시키는대로 따라가면, 쉽게 풀 수 있는 문항이다.

유사문항 1. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$ 의 값을 구하시오.

$$(가) \sum_{n=1}^5 (a_n + b_n) = 27$$

$$(나) \sum_{n=1}^5 (a_n + |b_n|) = 67$$

$$(다) \sum_{n=1}^5 (|a_n| + |b_n|) = 81$$

[2019학년도 수능 나형 29번]

유사문항 2. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 이다.

(단, r 는 $0 < |r| < 1$ 인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m| \geq 5$ 를 만족시키는 100 이하의 자연수 m 의 개수를 p 라 할 때, $p + a_1$ 의 값은?

[2023학년도 9월 모의고사 15번]

① 8

② 10

③ 12

④ 14

⑤ 16

5월 모의고사 완벽 분석서 : 코멘트 및 유사문항(확통)

27. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는?

(가) $a \times b \times c \times d = 108$

(나) a, b, c, d 중 서로 같은 수가 있다.

① 32

② 36

③ 40

④ 44

⑤ 48

[2024년 5월 모의고사 27번]

TEAM 수리남's TIP

여사건인가? 정사건인가?

제한조건이 걸려 있을 때, 항상 여사건이 존재하고, 여사건으로 푸는 것이 빠른지, 정사건으로 푸는 것이 빠른지를 빠르게 판단하는게 경우의 수 문제풀이에서 굉장히 중요한 요소이다. 이 문항은 'a, b, c, d가 모두 다르다' 라는 여사건을 떠올려도, 'a, b, c, d는 모두 10 이하의 자연수' 라는 또 다른 제한조건 때문에 여사건을 고려하기 굉장히 까다롭다는 것을 바로 인지해야한다.

TEAM 수리남's TIP

$a \times b \times c \times d = 108$ 라는 조건을 보면 중복조합부터 떠올랐을 것이다. 이때 (나) 조건과 'a, b, c, d는 모두 10 이하의 자연수' 라는 두 가지 제한조건이 있어, 이를 해결해야 한다. 108을 인수분해 해보면, a, b, c, d 중 같은 수가 있는 경우는 그렇게 많지 않다는 것을 알 수 있어 (나) 조건은 쉽게 해결할 수 있지만, a, b, c, d는 모두 10 이하의 자연수라는 조건 때문에 중복조합을 쓰기 어려웠을 것이다. 이렇게 강력한 제한조건이 걸려 있는 경우는 한 번에 해결하기 어려운 경우이고, 케이스가 몇 개 없으니 직접 케이스를 써보는 태도를 갖자.

1) 같은 수가 2인 경우 $2 \times 2 \times 3 \times 9$ 만 가능하다. a, b, c, d에 분배하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

2) 같은 수가 3인 경우 $3 \times 3 \times 3 \times 4$ 만 가능하다. a, b, c, d에 분배하는 경우의 수는 4

3) 같은 수가 6인 경우 $6 \times 6 \times 3 \times 1$ 만 가능하다. a, b, c, d에 분배하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$ 답 : 40

유사문항 1. 다음 조건을 만족시키는 자연수 자연수 a, b, c, d 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수를 구하시오.

(가) $a \times b \times c \times d = 108$

(나) a, b, c, d 중 서로 같은 수가 있다.

[2024년 5월 모의고사 27번 변형]

유사문항 2. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수는?

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$ 는 홀수이다.

(나) $f(2) < f(4)$

(다) 함수 f 의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128

② 132

③ 136

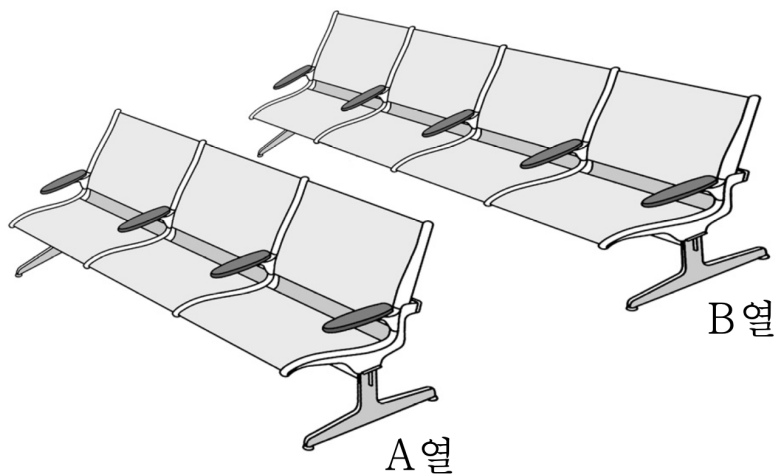
④ 140

⑤ 144

[2024학년도 6월 모의고사 28번]

28. 그림과 같이 A열에 3개, B열에 4개로 구성된 총 7개의 좌석이 있다. 1학년 학생이 2명, 2학년 학생이 2명, 3학년 학생 3명 모두가 이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은?(단, 한 좌석에는 한 명의 학생만 앉는다.)

- (가) A열의 좌석에는 서로 다른 두 학년의 학생들이 앉되, 같은 학년의 학생끼리는 이웃하여 앉는다.
 (나) B열의 좌석에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 한다.



① $\frac{2}{15}$

② $\frac{16}{105}$

③ $\frac{6}{35}$

④ $\frac{4}{21}$

⑤ $\frac{22}{105}$

[2024년 5월 모의고사 28번]

TEAM 수리남's TIP

합의 법칙? 곱의 법칙?

계산 구조가 동일하면 곱의 법칙, 계산 구조가 다르면 케이스를 나누는 합의 법칙을 사용하는 것이 경우의 수의 기본이다. (가) 조건을 분석할 때, A열에 3학년 학생과 1학년 학생이 앉는 경우와 A열에 3학년 학생과 2학년 학생이 앉는 경우는 서로 같은 구조, A열에 1학년 학생과 2학년 학생이 앉는 경우는 위 경우와 다른 구조라는 것을 쉽게 알아야 한다.

전체 경우의 수 = 7!

1) A열에 1, 2학년 학생이 같이 앉는 경우

B열에 모두 3학년 학생이 앉아야 하는데, 이러면 (나) 조건을 만족하지 않는다.

2) A열에 1, 3학년 학생이 같이 앉는 경우

A열에 3학년 학생이 2명 앉을지 1명 앉을지에 따라 계산 구조가 달라지므로 케이스를 나눠야 한다.

① 3학년 학생이 2명이 A열에 앉는 경우

331, 133(학년 생략)과 같이 앉아야 (가)조건을 만족한다.

즉, 이 경우의 수는 2(위 줄 2가지 경우) \times 3 \times 2 \times 2(A열에 위와 같이 1, 3학년 학생을 배열하는 경우의 수)
= 24

이제 남은, 3학년 1명과 1학년 1명, 2학년 2명을 B열에 배열해야 한다.

2학년이 이웃하지 앉는 경우는 2_2, _2_2, 2_2_와 같으므로, 경우의 수는 아래와 같다.

3(위 줄 3가지 경우) \times 2(남은 3학년, 1학년 학생을 배열하는 경우) \times 2(2학년 학생 배열하는 경우) = 12
24 \times 12 = 288가지

② 3학년 학생이 1명이 A열에 앉는 경우

113, 311(학년 생략)과 같이 앉아야 (가)조건 만족

즉 이 경우의 수는 이 경우의 수는 2(위 줄 2가지 경우) \times 3 \times 2(A열에 위와 같이 1, 3학년 학생을 배열하는 경우의 수) = 12

이제 남은 3학년 학생 2명과, 2학년 학생 2명을 B열에 배열해야 한다.

3232, 2323 2가지 경우가 있고, 배열하는 경우의 수를 계산하면

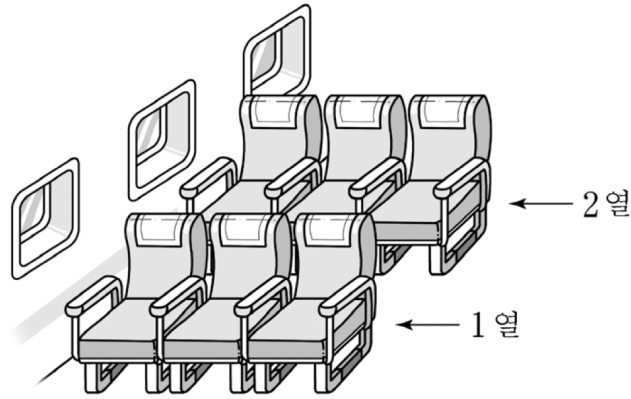
$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$12 \times 8 = 96$$

A열에 2, 3학년 학생이 같이 앉는 경우는 위와 구조가 같으므로 $2 \times (288 + 96) = 768$ (가지)

$$\text{답: } \frac{768}{7!} = \frac{16}{105}$$

유사문항 1. 할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오.



[2009학년도 9월 모의고사]

유사문항 2. 그림과 같이 의자 6개가 나란히 설치되어 있다. 여학생 2명과 남학생 3명이 모두 의자에 앉을 때 여학생이 이웃하지 않게 앉는 경우의 수를 구하시오.(단, 두 학생 사이에 빈 의자가 있는 경우는 이웃하지 않는 것으로 한다.)



[2011년 고2 3월 모의고사]

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

- (가) $a + b + c + d + e = 11$
 (나) $a + b$ 는 짝수이다.
 (다) a, b, c, d, e 중에서 짝수의 개수는 2 이상이다.

[2024년 5월 모의고사 29번]

TEAM 수리남's TIP

중복조합 형태의 문제에 제한 조건이 2개 달려있는 문제이다. $a+b$ 가 짝수라는 조건을 보고, (a, b) 가 (짝수, 짝수)인 경우, (홀수, 홀수)인 경우가 있다는 것을 바로 알아낼 수 있고, 케이스를 나누면 (다) 조건은 어렵지 않게 해결할 수 있는 문제이다.

1) (a, b) 가 (짝수, 짝수)인 경우 - (다)의 제한조건을 고려할 필요가 없음

$a+b$ 로 가능한 수가 4, 6, 8이라는 것을 알 수 있다.

① $a+b$ 가 4인 경우 - (a, b) 는 (2, 2)만 가능하다.

$c+d+e=7$ 인 경우의 수는 ${}_3H_4 = 15$ (가지)

② $a+b=6$ 인 경우 - (a, b) 는 (2, 4), (4, 2)만 가능

$c+d+e=5$ 인 경우의 수는 ${}_3H_2 = 6$ 따라서 $6 \times 2 = 12$ (가지)

③ $a+b=8$ 인 경우 - (a, b) 는 $a=2, 4, 6$ 으로 3가지

$c+d+e=3$ 인 경우의 수는 1가지 따라서 $3 \times 1 = 3$ (가지)

2) (a, b) 가 (홀수, 홀수) -> c, d, e 중 짝수가 2개 있어야 함 (c, d, e 중 짝수 2개 이상인데, 합이 홀수 이므로)

$a+b$ 로 가능한 수가 2, 4, 6이라는 것을 알 수 있다.(8이면 c, d, e 가 1로 조건 만족x)

① $a+b=2$ - (a, b) 가 (1, 1)로 1가지

$c+d+e=9$ e 가 홀수라 생각하면 $(2c'+2) + (2d'+2) + 2e'+1 = 9$ 에서 $c'+d'+e'=2$ 이므로 ${}_3H_2 = 6$

홀수인 수를 선택하는 경우가 3가지이므로 $3 \times 6 = 18$ 가지

② $a+b=4$ - (1, 3), (3, 1)로 2가지

$c+d+e=7$ 위와 마찬가지로 방법으로 9가지이므로 $2 \times 9 = 18$ 가지

③ $a+b=6$ - $a=1, 3, 5$ 로 3가지

$c+d+e=5$ (2, 2, 1)만 가능하므로 3가지, 따라서 $3 \times 3 = 9$ 가지

따라서 총 경우의 수는 위를 모두 더하면 75가지 임을 알 수 있다.

유사문항 1. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수를 구하시오.

(가) $a \leq b \leq c \leq d$

(나) $a \times d$ 는 홀수이고, $b+c$ 는 짝수이다.

[2024학년도 9월 모의고사 30번]

유사문항 2. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

(가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다.

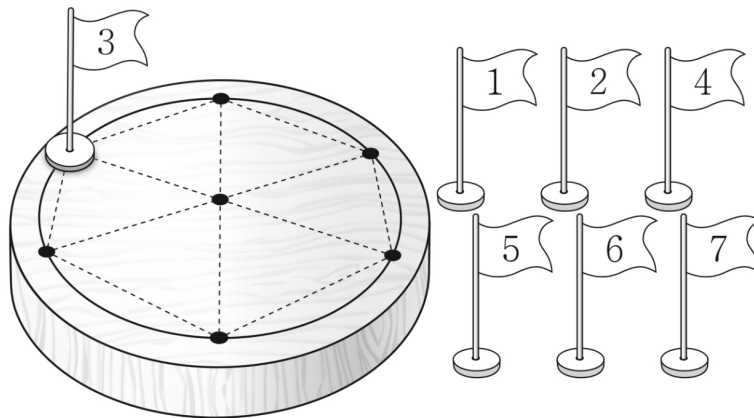
(나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다.

(다) 학생 A가 받는 공의개수는 홀수 이며, 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

[2021년 7월 모의고사 30번]

30. 그림과 같이 원판에 반지름의 길이가 1인 원이 그려져 있고, 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점과 원의 중심이 표시되어 있다. 이 7개의 점에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 깃발 7개를 각각 한 개씩 놓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전에서 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

깃발이 놓여 있는 7개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 세 꼭짓점에 놓여 있는 깃발에 적힌 세 수의 합은 12 이하이다.



[2024년 5월 모의고사 30번]

TEAM 수리남's TIP

강력한 제한조건

강력한 제한조건이 걸려 있는 문항은 나올 수 있는 케이스가 별로 없어서, 나올 수 있는 케이스를 조사하고 그 후에 케이스 별로 경우의 수를 어떻게 구해야하는지 고민해보자.

TEAM 수리남's TIP

고정하기

대칭적인 경우의 수를 셀 때는 대표성을 갖는 한 가지 경우로 고정한 후, 이어서 세어지는 경우의 수를 곱해준다.

세 삼각형 꼭짓점의 수의 합이 12이하라는 것은 예시를 조금만 들어봐도 매우 강력한 제한조건임을 알 수 있다.

어떻게 삼각형을 잡아도 가운데 숫자는 무조건 포함되는데, 예를들어 가운데 숫자가 7이라고 생각해 보면 6과 5는 어떤자리에도 들어갈 수 없다. 조금만 생각해봐도 가운데 들어갈 수가 매우 한정적인 상황이라는 것을 알 수 있다.(강력한 제한조건임을 인지)

그렇다면 가운데 수는 가능한 작은 수들이 들어가야 한다는 것이므로, 가운데 숫자가 1인 경우부터 생각해 보자.

1) 가운데 숫자가 1인 경우

큰 수들 때문에 문제가 생기므로 7을 먼저 배열해 보자. 원순열이므로, 7을 고정해서 생각해 보면 7 양 옆에는 5, 6이 오면 안된다는 것을 알 수 있다.

따라서 남은 3자리에 5, 6을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 가지

남은 숫자 2,3,4는 어떻게 배열해도 상관없으므로, $3! = 6$ 가지, 즉 총 36가지임을 알 수 있다.

2) 가운데 숫자가 2인 경우

마찬가지로 7을 고정해 보자. 7 양 옆 자리는 무조건 1,3이 와야하므로 2가지

5, 6이 인접할 수 없으므로 5, 6의 자리는 정해진다(둘의 순서만 바뀔 수 있음) 즉, 총 2가지

4는 5, 6사이로 자동으로 정해짐. 따라서 총 4가지임을 알 수 있다.

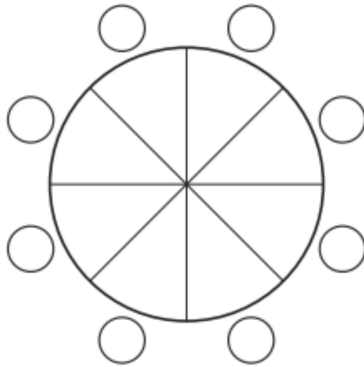
3) 가운데 숫자가 3인 경우

7을 고정하면, 양 옆이 무조건 1, 2만 가능한데, 남은 3자리에 4, 5, 6을 어떻게 배열해도 12가 넘어감을 쉽게 알 수 있다. 즉 가운데 숫자가 3 이상이면 문제조건이 성립하지 않는다.

답 : 40가지

유사문항 1. 1학년 학생 3명, 2학년 학생 3명, 3학년 학생 2명이 일정한 간격을 두고, 원 모양의 탁자에다음 조건의 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

- (가) 같은 학년 학생끼리는 서로 이웃하여 앉지 않는다.
 (나) 같은 학년 학생끼리는 서로 마주보고 앉지 않는다.



[2023학년도 EBS]

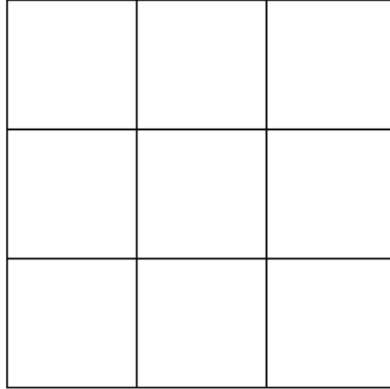
유사문항 2. 아래 그림은 원을 6등분 한 부채꼴을 나타낸 것이다. 다음 조건을 만족시키도록 6개의 각 부채꼴에 하나씩 숫자를 적는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

- (가) 6개의 각 부채꼴에 하나씩 쓰여진 숫자는 1 이상 10 이하의 자연수이고, 모두 다른 수이다.
 (나) 임의의 부채꼴에 쓰여진 수를 a 라 할 때, 이웃한 두 부채꼴에 쓰여진 두 수를 각각 b, c 라 하면, $a+b+c$ 는 3의 배수이다.



[EBS 고난도 수학]

유사문항 3. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

- (가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
- (나) 한 정사각형에는 한 가지의 색만을 칠한다.
- (다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k \times 7!$ 이다. k 의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[2020년 3월 모의고사 수학(가) 27번]

