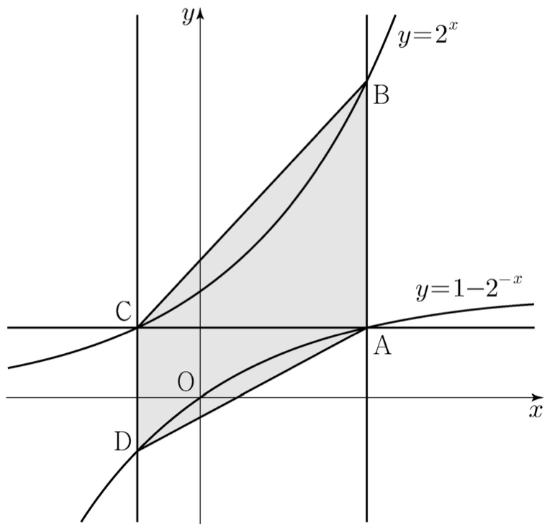
TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항해설(12번)

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$위의 제 1사분면에 있는 점 A를 지나고, y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{5}{2}\log_2 3-\dfrac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{7}{2}\log_2 3-\dfrac{7}{4}$ ④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\dfrac{9}{2}\log_2 3-\dfrac{9}{4}$

[2025학년도 6월 모의고사 12번]

풀이 시작에 앞서

오늘 학생들 사이에서 12번에 대한 얘기가 상당히 많았습니다. 계산이 너무 복잡하다는 것이 주된 의견이었습니다.
수 년간 학생들을 가르치면서 느낀 점이지만, 어떻게 하면 계산을 줄일 수 있을지, 이 상황에서는 어떤 풀이방식이 더 간단할지 등의 고민은 전혀하지 않고, 단순히 정형화 된 풀이방법만을 연습하는 학생들이 많았습니다. 이 문항을 어렵게 느꼈다면, 지금까지 전혀 이런 고민은 하지 않고, 단순히 문제를 풀어내는데만 목적을 두고 공부를 해왔을 것입니다. 저희 팀에서는 문제 상황의 이해를 돕기 위해 시각화를 강조하고 있지만, 무작정 그래프로만 문항을 풀어내는 것이 아닌, 이 문제는 왜 그래프로 푸는 것이 편한지, 수식으로 풀면 어떨지에 대한 고민 등, 상황에 문제를 더욱 쉽게 풀어내려는 연습이 필수적입니다.

풀이 1) 미지수는 적을수록 좋다!

TEAM 수리남's TIP

미지수가 들어간 문제 풀이의 핵심은 미지수 설정을 최대한 적게하는 것이 좋다는 것이 기본입니다. 무작정 미지수 2개를 놓고, 생각없이 계산만 하려고 했다면, 갑자기 계산이 많아지고 3차 방정식을 풀게 되는 상황을 마주했을 것입니다.
또한 미지수가 한 개라도 식이 복잡해진다면, 문자를 간단하게 치환하는 것이 기본입니다.

cf) 사실 3차 방정식 풀이를 마주했다고해도, 그렇게까지 계산이 복잡한 문제는 아닙니다. 도저히 간단한 풀이가 시험장에서 생각이 안 된다면 당황하지 말고 차분히 진득하게 식을 써나가세요. 그래서 수특/수완이나 사설 문항을 풀면서 계산이 복잡한 문항이 나왔다고, 넘기지만 말고, 진득하게 풀어보세요. 계산 능력을 기르는 것은 수학에서 매우 중요합니다. 계산을 간단히 할 줄 아는 것의 기본은 많은 양의 계산을 통해 얻은 경험이기 때문이죠.

1. C의 x좌표를 a라 하자.

C의 y좌표는 2^a가 되고, D의 y좌표는 $1-\dfrac{1}{2^a}$이 됨을 알 수 있습니다.

이때, 미지수는 1개이지만, 2^a이 복잡하게 반복해서 나오고 있으니까 이를 t로 치환하겠습니다.

그렇다면, C의 y좌표는 t, D의 y좌표는 $1-\dfrac{1}{t}$가 됩니다.

2. A, B의 좌표도 t에 대해 표현하자.

A와 C과 관련이 있으니, 이를 이용하면 A, B도 C, D와 같은 문자로 표현할 수 있을 것입니다.

A의 y좌표는 C와 같으므로 t가 됩니다.
B의 y좌표는 A의 x좌표를 b라 하면, 2^b이 되고, 이를 t로 표현해야 합니다.
A의 y좌표는 $1-2^{-b}$이고, 이것이 t이므로 2^b도 t에 대해 표현할 수 있습니다.

$1-2^{-b}=t \ \ 2^b=\dfrac{1}{1-t}$

따라서 모든 점의 y좌표를 t에 대해 표현하는데 성공했습니다.

3. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$ 라는 관계식을 이용해 t값을 찾자.

$$\frac{1}{1-t}-t=2\times\left(t+\frac{1}{t}-1\right)$$

위 식을 통분하면 $\dfrac{t^2-t+1}{1-t}=2\times\dfrac{t^2-t+1}{t}$이므로 $\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{2}{t}$ 따라서 $t=\dfrac{2}{3}$

4. 나머지는 간단한 계산!

답은 ③

풀이 2) 구조가 동일한 것끼리 계산하는 것이 기본이다!

TEAM 수리남's TIP

이 문제를 미지수 2개로 놓고 풀어도 간단하게 풀 수 있습니다. 하지만 학생들은 문제 조건에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$라 했으니 아무 생각없이 B의 y좌표에서 A의 y좌표를 빼서 AB의 길이를 구하려고 했을 것입니다. 이 문항에서는 B의 y좌표에서 C의 y좌표를 빼는 것이 훨씬 간단할 수 밖에 없는 문제입니다. 같은 그래프 상에 있는 점이므로, 구조가 같을 것이고, **구조가 동일한 것끼리 묶어 계산**하는 것이 기본적인 계산 태도이기 때문이죠.

점 C, D의 x좌표를 a라 하고, 점 A, B의 x좌표를 b라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}$ = B의 y좌표 − C의 y좌표 $=2^b-2^a$

$\overline{\mathrm{CD}}$ = A의 y좌표 − D의 y좌표 $=2^{-a}-2^{-b}=\dfrac{1}{2^a}-\dfrac{1}{2^b}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$ 이므로, $2^b-2^a=2\times\left(\dfrac{1}{2^a}-\dfrac{1}{2^b}\right)=\dfrac{2\times(2^b-2^a)}{2^{a+b}}$이므로 $a+b=1$. 나머지는 간단한 계산!

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항해설(14번)

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

[2025학년도 6월 모의고사 14번]

1. 문제를 읽기 전

① 로그의 밑이나 진수 조건을 따지는 것은 기본이므로, $kn<75$임을 적고 시작하자.

② 루트 안에 있는 수는 양수이므로, $-n^2+10n+75>0$이고, $n^2-10n-75=(n+5)(n-15)<0$이므로 이를 만족하는 n의 범위는 $-5<n<15$이다. n은 자연수이므로 $n=1$~15인 자연수임을 알 수 있다.

2. 로그에서 밑을 통일하는 것이 기본이므로, 밑을 2로 통일하자.

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn) = \log_2\dfrac{\sqrt{-n^2+10n+75}}{\sqrt{75-kn}}>0$인 자연수 n의 개수가 12임을 알 수 있다.

따라서 로그가 0보다 크기 위해서는 진수가 1보다 커야하고, $\dfrac{\sqrt{-n^2+10n+75}}{\sqrt{75-kn}}>1$인 자연수 n의 개수가 12임을 알 수 있다.

어차피, 루트안에 있는 수가 모두 양수이므로, 양변을 제곱해도 상관없다.
따라서 $\dfrac{-n^2+10n+75}{75-kn}>1$이고, $-n^2+10n+75>75-kn$를 만족하는 자연수 n의 개수가 12이다.

위 식을 정리해서 쓰면 $n^2-(10+k)n<0$이고, $0<n<10+k$가 이 식을 만족하는 n의 범위가 된다.
이 범위를 만족하는 n의 개수가 12가 되려면 k는 최소 3임을 알 수 있다.
$k=3$이면, $n=1$~12 모두 만족하기 때문에, n의 개수가 12개가 된다는 것을 알 수 있다.
$k=4$이면, $n=1$~13 모두 만족하기 때문에, n의 개수가 13으로 문제에서 원하는 k값이 아니다.

하지만, 문제에서 k값의 합을 구하라고 했고, 이는 k값이 여러 개가 나온다는 것인데, '어떻게 이것이 가능할까'를 고민해야 한다.

TEAM 수리남's TIP

문제를 풀다가, 뭔가에 막혀서 답이 나오지 않는 상황이라면, 쓰지 않은 조건이 있는지부터 확인하자.

우리가 안 쓴 조건을 생각해보면, 1. 문제를 읽기 전에서 구해놓은 $kn<75$라는 제한조건이다. 즉

$0 < n < 10+k$를 모두 만족하는 것이 아닌, 이 중에서 kn이 75보다 커지는 n은 제외해야하는 것이다.
$k=3,\ 4$였을 때는 kn이 75보다 커지기 위해서는 n이 최소 25, 19처럼 15가 넘어가기 때문에, 상관없었지만 k가 조금만 커지면, $n=15$에 가까운 수 일 때 kn이 75보다 커질 것이다.

즉, $k=6$일 때, $n=13,\ 14,\ 15$에서 kn이 75보다 커지게 되고, 이 범위를 만족하는 n이 1부터 12로 12개를 만족하기 때문에 문제를 만족하는 k값이 됨을 알 수 있다.
k가 이보다 커지면 당연히 n의 개수는 줄어들 것이므로, 문제를 만족하는 k는 $3,\ 6$임을 알 수 있다.

따라서, k값의 합은 9이다.

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항 해설 (15번)

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x - k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분 가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)| + t(t-1)\}dt \geq 0 \text{ 이고}$$

$$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)| - (t-1)(t+2)\}dt \geq 0 \text{ 이다.}$$

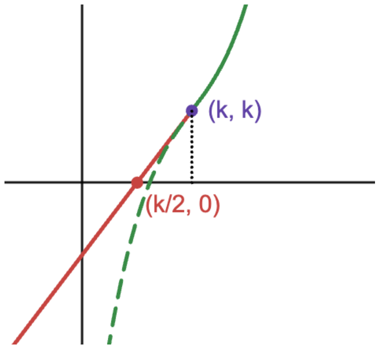
$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

[2025학년도 6월 모의고사 15번]

쉬운 문항은 아니었으나, ***절대로 어려운 문항은 아닙니다.*** $g(x)$는 비교적 간단하게 정의되어 있고, 박스 안의 적분 조건만 잘 해석하면 바로 풀리는 문항입니다.

1. $g(x)$에 대한 분석

상수 k 부근에서 $g(x)$의 그래프를 그려보면, 다음과 같은 모습이다.



이런 모양의 그래프를 그려놓고, $f(k)=k$와 $f'(k)=2$정도만 써두고 넘어가자.

2. $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$ 조건의 분석

TEAM 수리남's 핵심노트

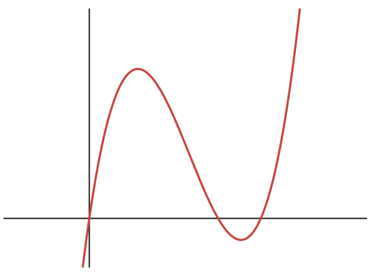
$\int_0^x H(t)\ \ dt \geq 0$ 조건의 분석

모든 실수 x에 대하여 $\int_0^x H(t)\ \ dt \geq 0$ 이 성립할 때,

$H(0)=0$과 **0 부근에서** $\begin{cases} H(t) \geq 0 & (t \geq 0) \\ H(t) \leq 0 & (t < 0) \end{cases}$ 이 성립한다.

하지만 **모든 실수** t에 대하여 $\begin{cases} H(t) \geq 0 & (t \geq 0) \\ H(t) \leq 0 & (t < 0) \end{cases}$ 이 성립한다고 말할 수는 없다.

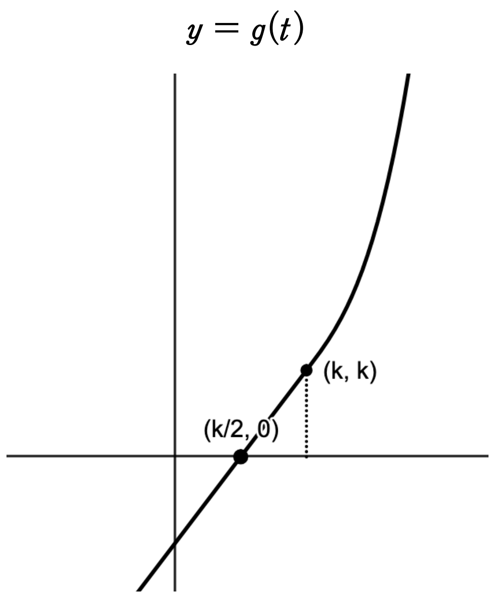
반례)

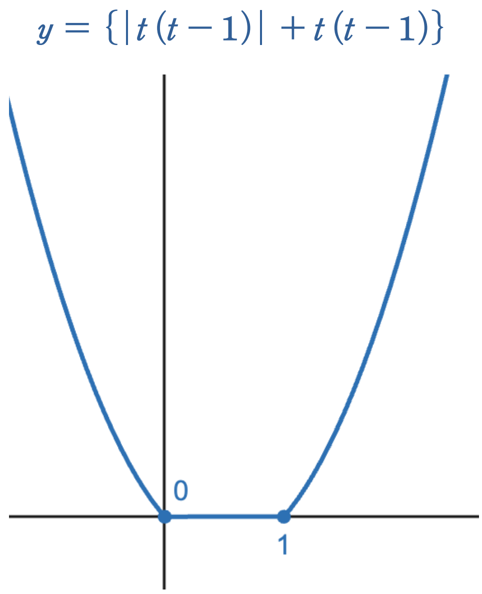


→ 만약 $H(t)$의 그래프를 그리는 것이 어렵지 않다면, **$H(t)$를 그려** 해결할 수 있도록 한다.

$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$ 에서 적분식 안에 있는 $g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$를 가로축이 t인 평면에 그려보자.

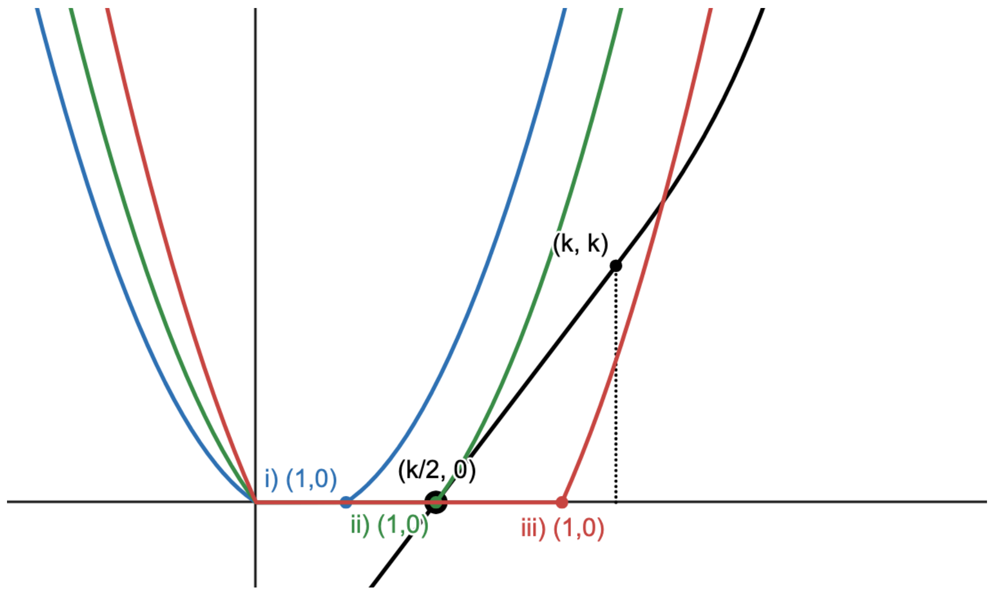
우선, $g(t)$는 $t \leq k$에서 1차식, $t > k$에서 3차식이므로 $\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$ 항과 1차식/3차식의 곱으로 생각하면 $g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$는 0 또는 3차식 또는 5차식인 다항식이다. ***(복잡한 식이 아니다.)***





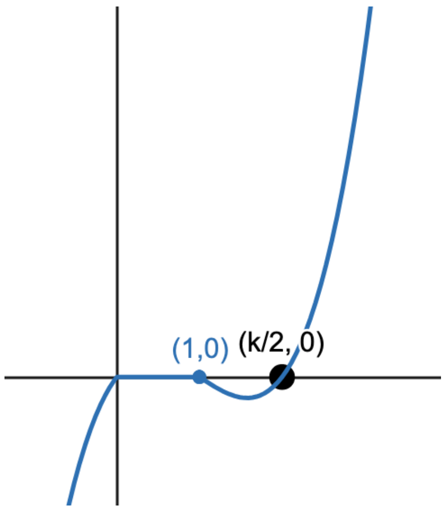
두 함수의 곱함수의 그림을 그리기 위해서는 $g(t)$와 $\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$이 0이 되는 지점을 잘 살펴봐야 한다.

1과 $\frac{k}{2}$ 의 대소관계에 따라 경우를 나눠보면, i) $1<\frac{k}{2}$, ii) $1=\frac{k}{2}$, iii) $1>\frac{k}{2}$ 로 나눌 수 있다.

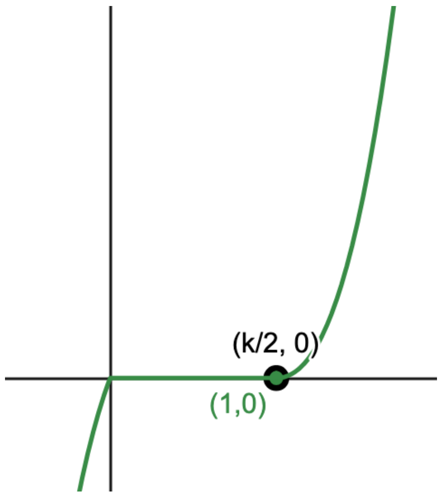


각 경우별로 $y=g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$ 의 그래프를 그려보면, 다음과 같다.

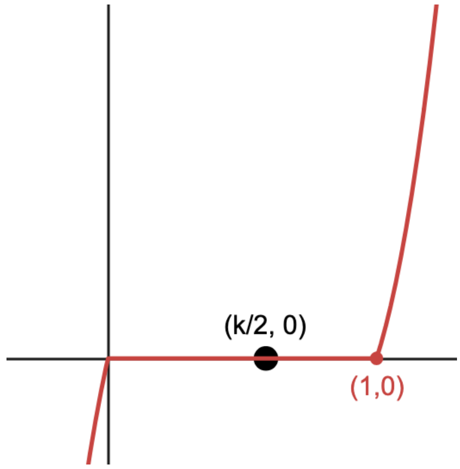
i) $1<\frac{k}{2}$



ii) $1=\frac{k}{2}$



iii) $1>\frac{k}{2}$

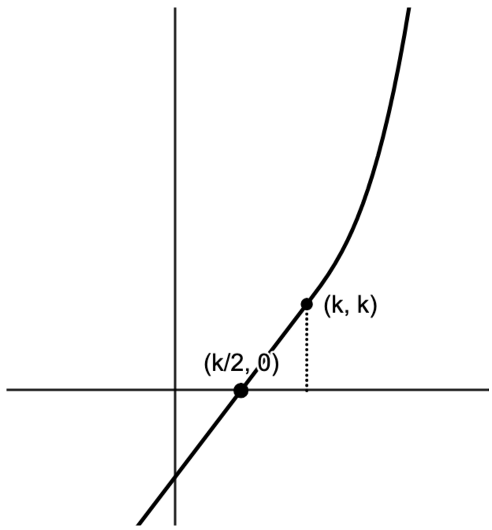


$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \geq 0$ 라고 하였으므로, i) $1<\frac{k}{2}$ 은 해당되지 않고, $1 \geq \frac{k}{2}$, 즉 $2 \geq k$이다.

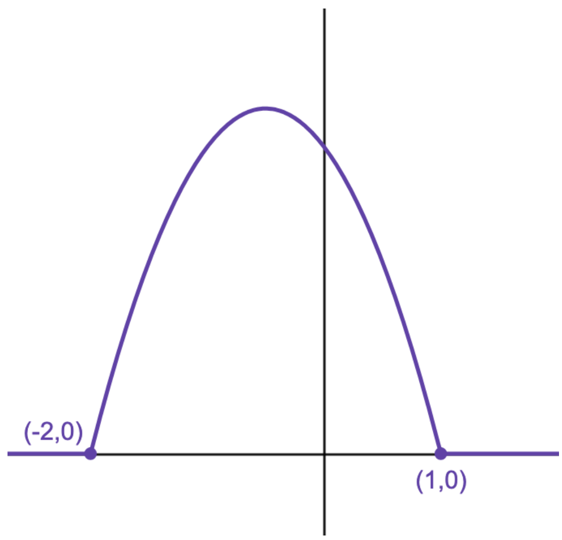
3. $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \geq 0$ 조건의 분석

2에서와 마찬가지 방법으로 $y=g(t)$와 $y=\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$ 의 곱으로 해석해서 풀어내면 된다.

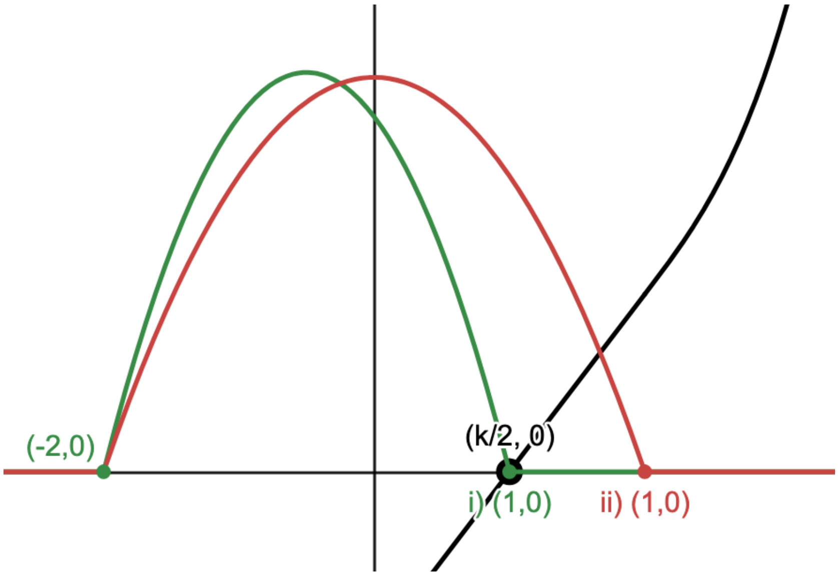
$y=g(t)$



$y=\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$

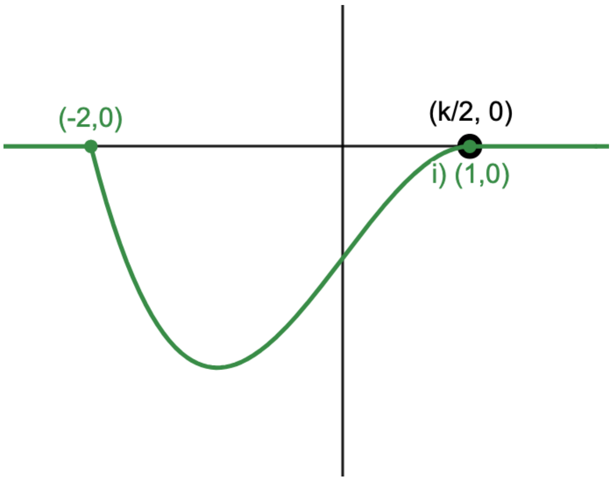


이번에는 $k \le 2$를 알고 있으므로, i) $1=\frac{k}{2}$, ii) $1>\frac{k}{2}$ 의 두 가지 경우로만 나누면 된다.

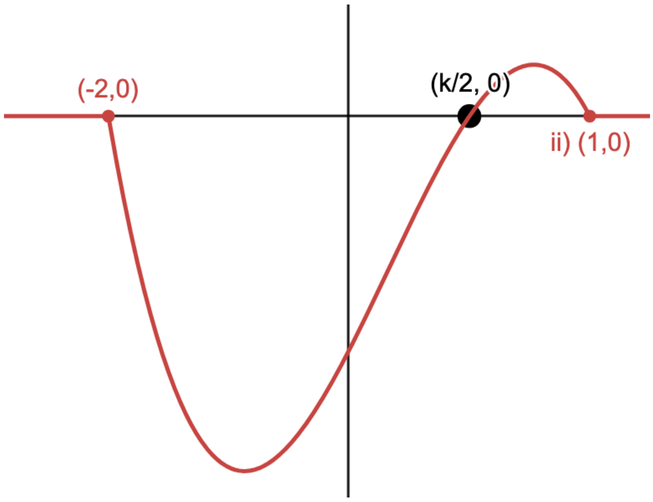


각 경우별로 $y=g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$ 의 그래프를 그려보면, 다음과 같다.

i) $1=\frac{k}{2}$



ii) $1>\frac{k}{2}$



$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \ge 0$ 라고 하였으므로 ii) $1>\frac{k}{2}$ 는 해당되지 않고,

$1=\frac{k}{2}$, 즉 $k=2$이다.

4. 정답 구하기

결국 문제에서는 $g(k+1)=g(3)=f(3)$의 최솟값을 구하라고 하였으므로,

① $f(k)=k \ \rightarrow \ f(2)=2$

② $f'(k)=2 \ \rightarrow \ f'(2)=2$

③ $x>2$에서 $f'(x)\geq 0$

위 세 가지 조건을 활용하여 $f(3)$의 최솟값을 구하면 답이 나온다.

이 다음 과정은 단순 계산이므로 생략하도록 한다.

정답: ②

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항해설(20번)

20. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y = a\sin x + b$의 그래프가 직선 $x = \pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y = 1, y = 3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여

$a + b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오. [4점]

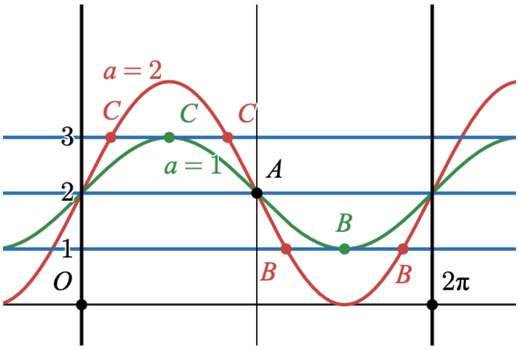
[2025학년도 6월 모의고사 20번]

20번 문항은 문제 세팅을 잘 하고 시작하면 쉽게 풀 수 있는 문제였다.
문제풀이에 어려움을 겪었다면 **본인이 헤멘 이유**, 그리고 **문제를 세팅한다는 의미**가 무엇인지를 아래 해제를 보며 꼼꼼하게 점검해보도록 하자.

1. 문제의 세팅 – 특정되지 않은 그래프의 형태 예측

$y=a\sin x+b$는 자유도가 두 개의 미지수로 상당히 높은 함수이다.
그러나 이 함수가 어떻게 생겨먹었을 것인지 그 패턴을 파악하는 것은 상당히 중요하다. b는 y축방향 이동을 뜻하고 a는 진폭을 뜻하니, b를 고정한 채로 a가 1~5 사이에서 움직일 때 그래프가 어떻게 변할지 파악해보자.

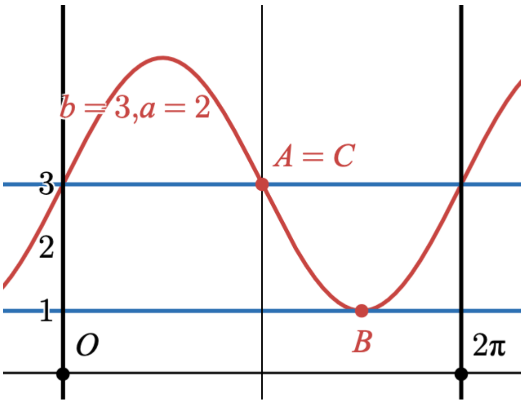
1) 우선, $b=2$일 때 $a=1,2$인 경우를 살펴보자.



위 그림과 같이 A,B,C에 해당하는 점들이 위와 같이 찍힌다.
이 때 A는 오직 $x=\pi$와 만나는 한 군데에서만 생기고,
B,C의 경우 $y=1,y=3$ 직선과 **i)만나지 않거나, ii)한 점에서 접하거나, iii)두 점에서 만나거나** 이렇게 3가지 방법으로만 생긴다는 것을 알 수 있다.

위 $b=2$인 경우, $a=2$이상부터는 항상 B,C가 두 개씩 생기는데,
이로부터 **b를 고정하고 a를 1부터 5까지 움직여보는 것이 쉽겠다**고 플랜을 세울 수 있다.

2) 한편, 자연스럽게 다음 생각으로 A와 B,C의 정의가 겹칠 수 있는 $b=1\text{ or }3$인 경우도 생각해보면, 이런 지점에서는 그림과 같이 B,C 둘 중 한 점은 A와 중복되고, 다른 한 점은 열린구간에 포함되지 않아 배제되는 상황을 생각할 수 있다.



따라서, $b=1$ or 3인 경우에도 **점 A를 고정**하고 **a를 1부터 5까지 움직여보는** 것으로 플랜을 세울 수 있다.

2. 최종 경우의 수 세기 – 표 활용

‘1.문제의 세팅’ 부분에서의 두 가지 경우들에 따라, b값을 고정하고 각각에 대해 a를 움직이며 가짓수를 세는 계획을 세웠고, 이를 바탕으로 최종적으로 경우의 수를 세어보자.

b	a	$n(AUBUC)$
1	1	1
	2	2
	3	3
	4	3
	5	3

b	a	$n(AUBUC)$
2	1	3
	2	5
	3	5
	4	5
	5	5

b	a	$n(AUBUC)$
3	1	1
	2	2
	3	3
	4	3
	5	3

b	a	$n(AUBUC)$
4	1	2
	2	3
	3	4
	4	5
	5	5

b	a	$n(AUBUC)$
5	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
	5	5

이를 바탕으로 $a+b$ 값의 최솟값은 $b=2, a=1$일 때 3, 최댓값은 $b=3, a=5$ or $b=5, a=3$일 때 8 이다.

답: $3\times8=24$

TEAM 수리남's TIP

자유도가 높은 대상을 다루는 문제들에서는 **반드시 우선 하나를 고정**하고 생각해야한다.
고정을 통해 몇 가지 경우들로 상황이 나뉜다고 판단되면, 각각의 상황에 대한 플랜을 세워 경우를 따져준다.

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항해설(21번)

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오 〔4점〕

[2025학년도 6월 모의고사 21번]

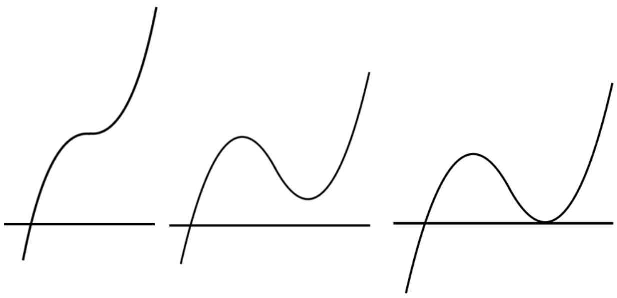
1. 조건 (가)의 해석

$f'(a) \le 0$인 실수 a의 집합이 어떤 특성을 가질지 생각하려면 우선 준 문제에서 $f'(x)$의 특성을 떠올릴 필요가 있다.
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 사차함수 이므로, $f'(x)$는 **최고차항 계수가 양수인 삼차함수**이다. 따라서 이런 삼차함수의 개형을 몇 가지 떠올릴 수 있다 – 경우를 나누어 조건을 만족하는지 하나씩 평가해보자.

TEAM 수리남's TIP

다항함수 중에서도 **고차함수**를 다루는 문제들에서는 이와 같이 개형들을 유형화해서 경우를 나누어야 하는 상황이 굉장히 많다.
많은 경우들을 빠르게 문제의 조건과 대조하기 위해서는 **사차함수 기본 개형과 각각에 대응되는 도함수의 개형을 완전히 꿰고 있어야 한다**. 만약 아래와 같이 경우를 나누는 것이 무리스럽게 느껴진다면 우선 사차함수의 모든 개형과 각각의 도함수를 외우다시피 통달하는 것이 가장 급선무이다.

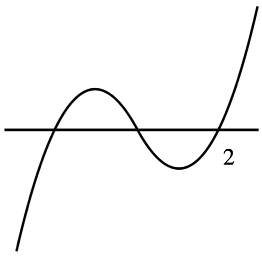
1) $f(x)$의 극값이 하나만 생기는 경우



$f'(x)$의 개형들이 위와 같은 경우로, 얻어지는 사차함수 $f(x)$의 극값이 하나 뿐이므로 조건 (나)의 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되게 하는 k가 존재하지 않는다.

2) $f(x)$의 극값이 세 개 생기는 경우

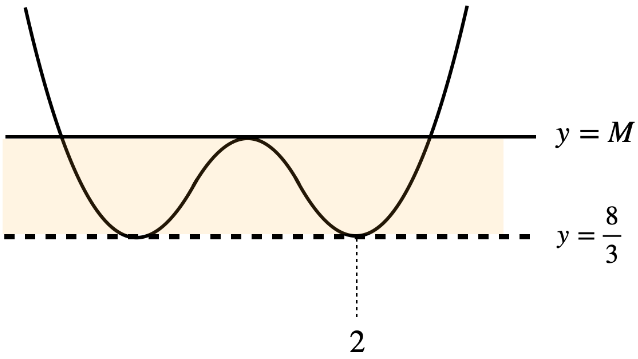
따라서 $f(x)$의 극값이 세 개 생기는 경우로 생각할 수 있다.
이 때 조건 (가)의 $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값이 2라는 조건으로부터, **가장 일반적인** $f'(x)$의 개형을 아래와 같이 그려낼 수 있다.



2. 조건 (나)의 해석

$f'(x)$에서 더 진도를 나가기 전에 우선 조건 (나)가 걸린다.
왜냐하면 조건 (나)는 사차함수 $f(x)$의 개형이 **i)첫 번째 극솟값이 두 번째 극솟값보다 작은 경우, ii)두 극값이 같은 경우, iii)첫 번째 극솟값이 두 번째 극솟값보다 큰 경우** 중 어떤 것인지에 따라 경우를 나누어야 하기 때문이다.

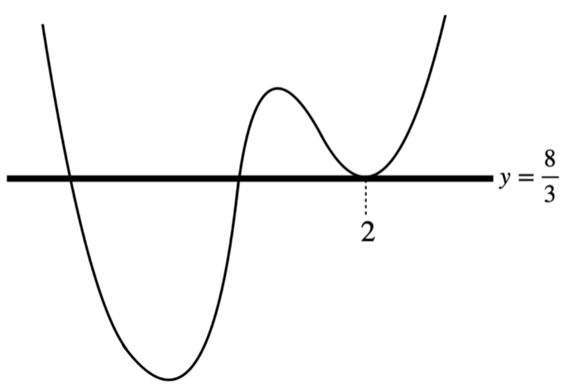
ii)두 극값이 같은 경우
조건 (나)에 맞는 실수 k의 범위를 구해보면,



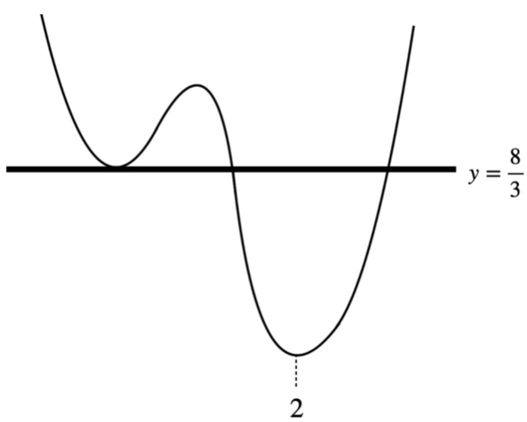
위 그림과 같이 k의 범위가 $\frac{8}{3} < k \leq M$ 으로, 최솟값이 존재하지 않게 된다.

i), iii) 두 극값이 다른 경우

i)

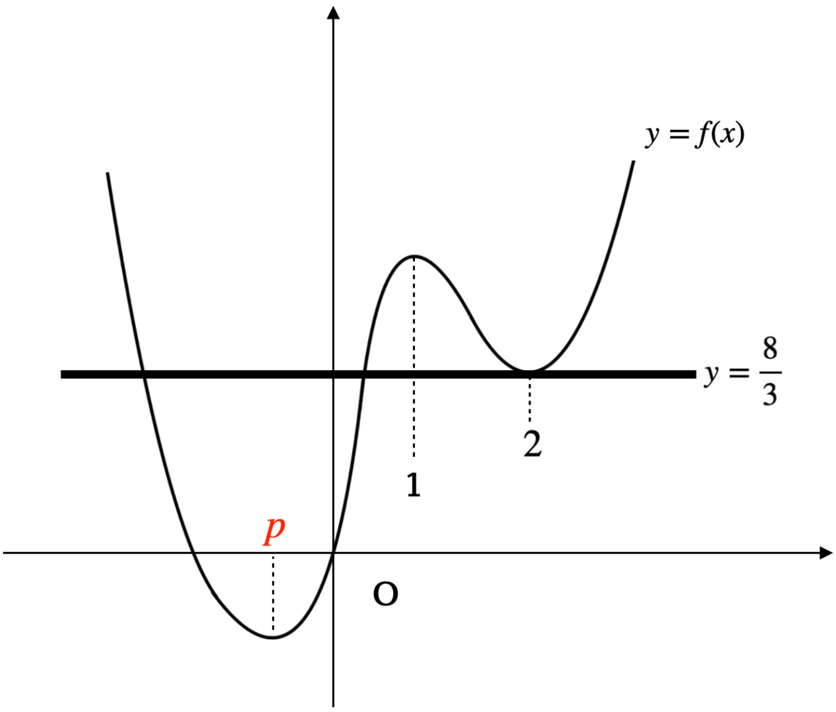


iii)



iii)의 경우, $f(0)=0$, $f'(1)=0$ 조건으로부터, 첫 번째 극솟값과 두 번째 극댓값 둘 중 하나가 $x=1$ 지점이 되어야하고, 어느 경우에서도 $f(0) \geq \frac{8}{3}$이 되어 조건을 만족할 수 없다.

따라서 **경우 i)로 그래프의 개형이 확정**된다.
$f(0)=0,\ f'(1)=0$을 만족하는 최종적인 개형을 그리면 아래와 같다.



따라서,
$f'(x)=4(x-p)(x-1)(x-2)$
꼴로 미지수가 한 개인 식이 완성된다.

여기에 적분 후 $f(0)=0,\ f(2)=\dfrac{8}{3}$ 조건을 대입하면 p 값이 구해져서 최종 답을 구할 수 있겠다고 예상한 뒤, 실수 없이 우직하게 계산을 마무리해주자.

$f'(x)=4(x-p)(x-1)(x-2)$

$=4x^3-4(3+p)x^2+4(2+3p)x^2-8p$

$f(x)=x^4-\dfrac{4}{3}(3+p)x^3+2(2+3p)x^2-8px\ \ (\because f(0)=0;\ C=0)$

$f(2)=\dfrac{8}{3}$ 으로부터 $p=-1$

$\therefore\ f(x)=x^4-\dfrac{8}{3}x^3-2x^2+8x$

$f(3)=15$

TEAM 수리남's 5월 모의고사 주요문항해설(22번)

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다., $a_{15} = 1$ 가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

[2025학년도 6월 모의고사 22번]

1. 문제를 보자마자 들었어야 하는 사고 과정

'요즘 자주 출제되는 역추적 수열 문제네?' 기본적으로 약간의 나열을 통해 역추적을 하며 풀었던 유형이지? 이때, $\sqrt{n}$이 자연수인 경우와 그 외의 경우로 a_{n+1}이 나뉘네?, $\sqrt{n}$이 자연수인 경우는 몇 없는 경우니까, 이를 기준으로 나열해봐야겠다!

TEAM 수리남's TIP

수열 문항을 푸는데 있어 약간의 나열을 통해 문제 상황을 이해하는 것은 아주 좋은 방법 중 하나입니다. 이때 무작정 나열하는 것이 아닌, **제한 조건을 활용하여 기준을 세워 나열**하는 것이 중요합니다.

2. $\sqrt{n}$이 자연수가 되는 수로 기준 나누기

$\sqrt{n}$이 자연수가 될 수 있는 2이상 15이하의 자연수는 $n=4,\ 9$ 이다. (15이하의 자연수를 찾는 이유는 $a_{15}=1$을 이용해서 역추적 할 것 이므로)

3. $a_{15}=1$을 알고 있으므로, 역추적을 한 번 해보자.

$a_{15}=a_{14}+1$ ... 따라서 $a_{14}=0$

$a_{14}=a_{13}+1=0$ ... 따라서 $a_{13}=-1$

.

.

.

따라서 $a_{10}=-4$임을 알 수 있다.

이제, $n=9$를 대입할 차례인데, 이때 경우가 두 가지 경우로 나뉜다는 것을 알 수 있다. $\sqrt{9}$는 자연수이지만, a_9가 양수인지, 음수인지에 따라 위 식에 대입을 해야할지, 아래 식에 대입을 해야할지 경우가 달라진다는 것을 알 수 있다.

1) $a_9<0$인 경우

$a_{10}=a_9+1$ ... $a_9=-5$

.

.

.

$a_5=-9$

이제, $n=4$를 대입해야함. 이때도 a_4가 양수인지 음수인지에 따라 달라진다는 것을 알 수 있다.

1-1) $a_4<0$인 경우

위와 마찬가지로, $a_2=-12$이고, $a_1=12$이다.

1-2) $a_4>0$인 경우

$a_5=a_4-2a_2=-9$

$a_4=a_3+1$

$a_3=a_2+1$이므로, 이를 연립해서 계산하면 $a_2=11$이고, $a_1=-11$이다.

2) $a_9>0$인 경우

$a_{10}=a_9-3\times a_3=-4$ … $a_9=3a_3-4$

$a_9=a_8+1$ … $a_8=a_9-1$

.

.

$a_5=a_9-4$

이제, $n=4$를 대입해야 한다. 이때도 a_4가 양수인지 음수인지에 따라 달라진다는 것을 알 수 있다.

2-1) $a_4<0$인 경우

$a_4=a_9-5$, 마찬가지로 $a_3=a_9-6=(3a_3-4)-6$이므로, $a_3=5$이다. $a_9=11$이므로 $a_4=6$이고 2-1) 조건을 만족하지 않는다.

2-2) $a_4>0$인 경우

$a_5=a_4-2a_2=a_9-4=3a_3-8$ … 즉, $a_4=3a_3+2a_2-8$

$a_4=a_3+1$이므로, $a_3+a_2=\frac{9}{2}$

$a_3=a_2+1$이므로, $a_2=\frac{7}{4}$이고, $a_1=-\frac{7}{4}$, 확인해보면 $2)$와 $2-2)$모두 만족하는 것을 알 수 있다.

따라서 가능한 a_1은 12, -11, $-\frac{7}{4}$이므로 이들의 곱은 231임을 알 수 있다.

TEAM 수리남's TIP

이 문항은 역추적을 하지 않고도, a_1부터 나열해서도 충분히 간단하게 풀 수 있으니, 한 번 풀어봅시다.

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항 해설 (미적 28번)

28. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\geq a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.
함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은?
(단, a는 상수이다.) [4점]

[2025학년도 6월 모의고사 28번]

1. $f(x)$에 대한 분석

$f(x)$가 범위에 따라 2개의 함수로 정의되어 있으므로, 편의상
$(x < a)$에서의 $f(x)$를 $f_1(x)$, $(x \geq a)$에서의 $f(x)$를 $f_2(x)$라 하자.

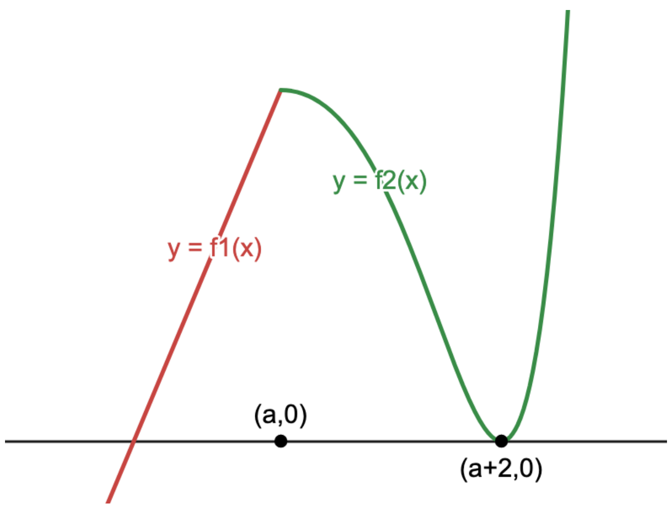
$f(x)$의 식을 살펴보면, 얼핏 보기에는 복잡해보이나
$f_1(x)$는 간단한 일차함수, $f_2(x)$는 (이차함수)×(e^x) 꼴로, 둘 다 그리기 어려운 함수가 아니다.

따라서 문제를 읽고 조금 더 직관적으로 이해하기 위해 시각화를 해두고 시작하는 것이 좋겠다.

$f'(x)$를 구해보면,

$$f'(x) = \begin{cases} f_2'(x) = (x-a)(x-a-2)e^x & (x > a) \\ f_1'(x) = e^{2a} & (x < a) \end{cases}$$

따라서, 아직 a의 값을 모르기 때문에 y축은 그리지 못하나, x축에 대하여 $f(x)$를 그려보면, 다음과 같다.



TEAM 수리남's TIP

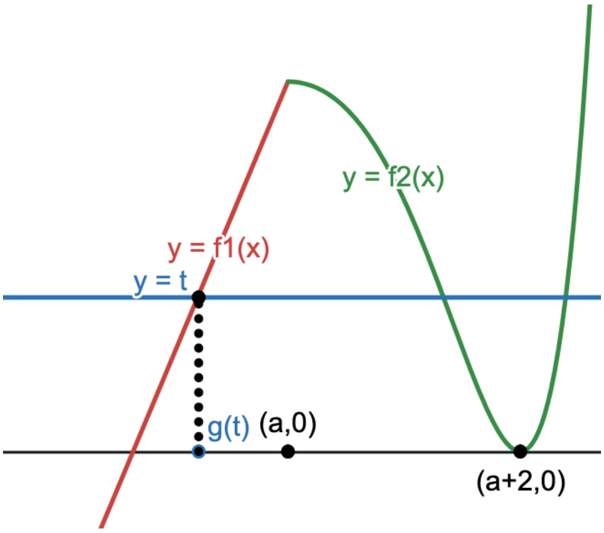
복잡한 식의 함수가 주어지더라도, 함수 몇 개의 곱 또는 나눗셈, 덧셈, 뺄셈 등 부분 부분 쪼개서 생각하면 함수를 이해하고 시각화하기 쉬운 경우가 많다.

시각화할 수 있는 함수식들은 간단하게라도 그려두자!
직관적 해석 / 부담 완화의 측면에서 큰 도움이 된다.

2. $g(t)$에 대한 분석

$g(t)$는 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값으로 정의되어 있다.

앞서 $f(x)$를 시각화하여 표현하였으므로, $f(x)=t$라는 조건은, 좌표평면 상에서 $y=f(x)$와 $y=t$라는 두 함수의 교점으로 해석할 수 있다.



$y=t$라는 직선이 아래에서부터 점점 위로 올라온다고 머릿속으로 시뮬레이션을 해보면,
빨간색 함수($f_1(x)$)의 극대점, 즉 $(a, 4e^a)$까지는 $g(t)$가 $f_1(x)$에 의해 결정되고,
$t>4e^a$부터는 초록색 함수 $f_2(x)$에 의해 결정된다.

정리하면, $t<4e^a$에서는 f_1의 역함수가 g,
$t>4e^a$에서는 f_2 $(y>4e^a)$의 역함수가 g인 것이다.

$g(t)$의 값이 $t=4e^a$를 기준으로 불연속적으로 변하므로, $4e^a=12$에서 $a=\ln 3$을 구할 수 있다.

대입하여 표현하면,
$t<12$에서는 f_1의 역함수가 g,
$t>12$에서는 f_2 $(y>12)$의 역함수가 g라는 것은 기억하고 넘어가자.

3. 정답 구하기

결국 문제에서 구하기를 원하는 것은 $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값이다.

$\begin{aligned}&(t<12):\ f_1(g(t))=t\\&(t>12):\ f_2(g(t))=t\end{aligned}$ 의 양변을 미분하여 원하는 값을 구해보자.

$\begin{array}{l}(t<12):\ g'(t)f_1'(g(t))=1 \\ (t>12):\ g'(t)f_2'(g(t))=1\end{array}$ 이므로, ① $t=f(a+2)$와 ② $t=f(a+6)$을 한 번씩 대입해주면 된다.

① $t=f(a+2)=0<12$이므로 위의 $g'(t)f_1'(g(t))=1$에 $t=f(a+2)=0$을 대입하면,

$$\begin{aligned}&g'(f(a+2))f_1'(g(f(a+2)))\\&=g'(f(a+2))\times f_1'(a+2)\\&=g'(f(a+2))\times e^{2a}\\&=g'(f(a+2))\times 9=1\end{aligned}$$

에서 $g'(f(a+2))=\dfrac{1}{9}$이다.

② $t=f(a+6)=48e^6>12$이므로 위의 $g'(t)f_2'(g(t))=1$에 $t=f(a+6)=48e^6$을 대입하면,

$$\begin{aligned}&g'(f(a+6))f_2'(g(f(a+6)))\\&=g'(f(a+6))\times f_2'(a+6)\\&=g'(f(a+6))\times 24e^{a+6}\\&=g'(f(a+6))\times 24\times 3\times e^6=1\end{aligned}$$

에서 $g'(f(a+6))=\dfrac{1}{24\times 3\times e^6}$ 이다.

$$\therefore\ \frac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}=\frac{\dfrac{1}{9}}{\dfrac{1}{24\times 3\times e^6}}=8e^6$$

정답: ④

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항 해설 (미적 29번)

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

[2025학년도 6월 모의고사 29번]

1. 미분가능성 문제 도식

의심점 찾기 ⟩ **의심점에서의 미분가능성 조사**

TEAM 수리남 칼럼 '미분가능성' 편에서 다룬 도식이다.

결국 이 문제에서도 구간별로 정의된 함수에 대해 미분가능성 조건을 사용해야하므로 의심점에서 미분가능성을 조사한다는 도식을 그대로 활용한다.
구간이 나뉘는 $x=b$지점이 의심점이 되겠고, 이 지점에서 두 가지 조건을 만족하면 미분가능 조건을 충족할 수 있다.

1) $f(b)=-f(b-c)$

2) $f'(b)=-f'(b-c)$

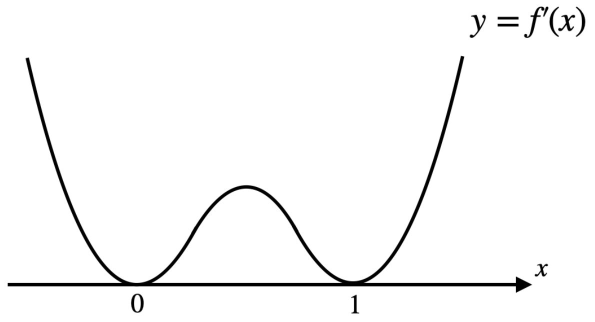
2. 그래프 파악

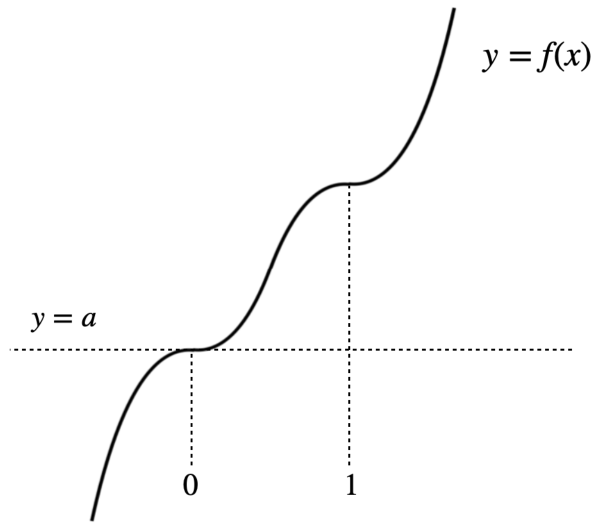
문제를 보자마자 해야할 것 중 하나가, **함수식이 주어지면 바로 그 정체를 알기 위해 그래프를 그려보아야 한다**는 점이라는 것을 거듭 교재와 칼럼에서 강조한 바 있다.
$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ 그래프를 그리는 방법은 기본형 그래프의 조작을 통해서도 있겠지만, 역시 교육과정 상 가장 기본이 되는 **미분을 활용해 그래프 개형**을 알아낼 수 있어야 한다.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$$

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2(x-1)^2}{x^2+1}$$

이로부터 $f'(x)$, $f(x)$의 개형을 구해낼 수 있다.





3. 조건 적용

1) $f(b) = -f(b-c)$

2) $f'(b) = -f'(b-c)$

이 조건을 어떻게 써먹을지 잘 살펴보자.
$f'(x)$, $f(x)$ 둘 다 식의 계산이 복잡하므로 대입을 통한 계산은 바람직하지 않다.

그래서 그래프 개형을 그리는 것이다: **전체적 그림이 있으면 조건이 어떻게 사용될지 예측하면서 동시에 적용할 수 있기 때문**이다.

$f'(x)$의 개형으로부터 모든 x 에 대해 $f'(x) \geq 0$ 라는 것을 알 수 있고, 따라서 위 조건 중
2) $f'(b) = -f'(b-c)$ 에서 반드시 $f'(b)+f'(b-c)=0$, $f'(b)=f'(b-c)=0$이 된다.

$b>0$, $c>0$ 이므로 위 조건을 만족하는 b, c의 값은

$b=c=1$

따라서 1) $f(b) = -f(b-c)$ 조건도 다시 $f(1)=-f(0)$으로 쓸 수 있다. 이 식으로부터 a값이 구해져 정답을 구할 것을 예상하면서 계산을 마무리해주자.

$$-\frac{2}{3}+\ln 2+a=-a$$

$$a=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b+c=-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{7}{3}$$

따라서 구하는 답은 55

TEAM 수리남's 6월 모의고사 주요문항 해설 (미적 30번)

30. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\ 3}\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점]

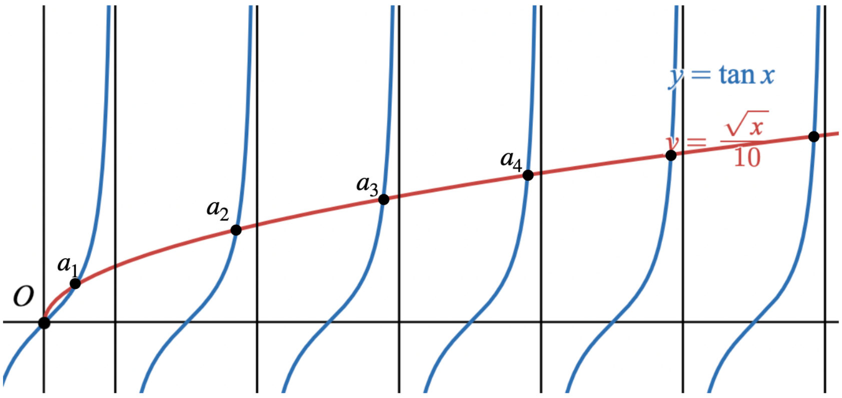
[2025학년도 6월 모의고사 30번]

이 문제는 사실 ***수리논술형 문제***에 가깝게, 어떻게 문제를 바라보느냐에 따라 해석이 매우 갈릴 수 있는 문제였다. 수능 수학에서 수리논술 정도의 엄밀함은 필요하지 않지만, 문제를 풀면서 어떤 아이디어를 떠올려야할지, 어떻게 식을 정리해야 논리의 비약 없이 풀어낼 수 있을지는 두 종목 모두 동일하게 중요한 부분이다. 풀이 그 자체보다도, **생각의 흐름**을 따라가보자.

1. 수열의 특성을 먼저 파악한다.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\,3}\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

알쏭달쏭한 이 녀석을 파헤쳐보자. 여기서 가장 관심을 가져야하는 **<u>본질적인</u> 대상**은
$\lim_{n\to\infty} a_n$ 과 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ 이렇게 두 녀석이 되겠다.

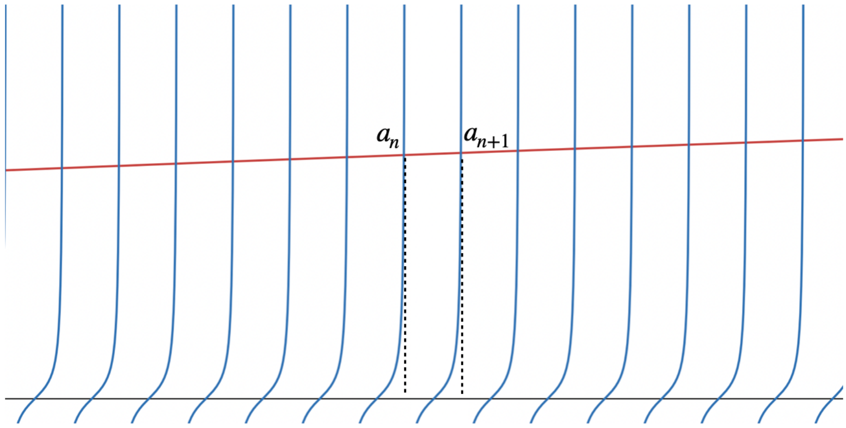


모든 수학적 논의에 앞서서, 문제의 구조를 한번 뜯어보겠다. 수리논술처럼 주제가 되는 수학적 개념을 제시문으로 가이드해주는 것도 아닌 문제에서, 처음부터 감도 없이 수식으로 접근하는 것은 아무 의미가 없다. 여기서 수식으로 먼저 정리해두어야할 관계식은 딱 한 가지이다.

$$\tan a_n=\frac{\sqrt{a_n}}{10}$$

그 외에 수식은 잠시 접어두자.
우선 주어진 수열의 특성을 파악하는 것이 가장 중요하다. 무한대로 보내질 때 대상이 어떻게 변하는지 감을 잡아보자. 위와 같이 그림을 그렸을 때, a_n의 각 항이 어떤 패턴으로 변화하는지 감이 오는가?

잘 감이 오지 않는다면 n이 아주 커질 때의 상황을 그림으로 나타내보면 도움이 된다.



a_n은 각각 $\frac{(2n-1)}{2}\pi$에 점점 가까워진다.

함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$는 수렴하지 않고 x가 무한대로 갈 때 무한히 커지는 함수이므로, n이 아주 커질 때 a_n, a_{n+1}은 각각 $\frac{(2n-1)}{2}\pi$, $\frac{(2n+1)}{2}\pi$ 에 매우 근접해진다 (즉 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n-1)}{2}\pi-a_n\right\}=0$, $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)}{2}\pi-a_{n+1}\right\}=0$.
따라서

$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$로 수렴할 것이다.

**수리논술이라면 $b_n=\frac{(2n-1)}{2}\pi-a_n$로 새로운 수열을 도입하거나, 유계 단조증가수열이 최소상계를 갖는다는 성질을 통해 수학적으로 엄밀하게 이런 결론에 접근할 것이다.*
하지만 수능 수학 문제에서는 이 정도 결론을 생각해두는 것이 이후 문제 접근의 방향성을 가이드해주기 때문에 전략적으로 중요한 사고방식이다, 수학적으로 엄밀한 방법을 모르는 학생들도, 반드시 주어진 수열의 패턴과 성질을 파악하는 습관을 들이기 바란다.

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$$

로 수렴한다는 사실로부터, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ 임도 유추할 수 있다.

**수학적으로 엄밀하게는, 두 수열의 곱의 극한값은, 두 수열이 모두 수렴해야 각각의 극한값으로 분리할 수 있다는 성질을 이용한다.*

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ 을 이용하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \times (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \times \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

여기까지 수열의 성질을 파악하는 사고과정을 기술해보았다.

다음은 주어진 식을 어떻게 **해석하고 정리**해낼지를 생각해야한다.

2. 주어진 식을 해석하기

$$\frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n\to\infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

이 복잡해보이는 식이 어떻게 정리될지를 생각해야한다.

우선 $\tan^2(a_{n+1} - a_n)$ 자체는 처음에 언뜻 모양만 보고 미분계수를 떠올리기 쉽지만, 실상 함숫값의 차이로 나타내어진 것도 아니고, 위 극한 자체가 (무한대)X0 꼴의 부정형이기 때문에 미분계수의 정의를 쓰는 상황이 아니다.

여기서 남은 선택지는 오직 탄젠트 덧셈정리를 이용해 식을 한 번 더 풀어헤치는 수밖에 없다.

$$\frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n\to\infty} a_n^3 \tan^2(a_{n+1} - a_n)$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \times \lim_{n\to\infty} a_n^3 \left\{\frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_{n+1} \tan a_n}\right\}^2$$

식을 정리하기 위해 처음에 얻었던 $\tan a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{10}$을 대입해주면,

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}\right\}^2=\frac{10}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}\right\}^2$$

여기쯤에서 이 극한에서 우리가 앞서 얻어낸 수렴하는 항들, 즉 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$을 활용해 **수렴하는 부분들을 상수로 빼내어**버리고, 무한대끼리만 모아주면서 식을 정리해주면 된다.

이는 엄밀하게 말하면 수능 수학 문제에서 구하는 답들은 <u>항상 전체 값이 수렴한다는 전제</u>를 바탕으로 한다. 수리논술이라면 이 수렴값을 α로 두고 극한간의 연산을 하겠지만, 수능 수학에서는 쭉 수렴하는 부분들을 분리해주면서 풀어도 된다.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\dfrac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\dfrac{\sqrt{a_n}}{10}}\right\}^2=\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}\right\}^2$$

$$=\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\;3}\left\{\frac{a_{n+1}-a_n}{100+a_n\times\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}}\times\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}\right\}^2$$

계속해서 수렴하는 꼴을 만들어 정리해준다.

$$\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)^2\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\ 3}\left\{\frac{1}{100+a_n\times\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}}\times\frac{1}{\sqrt{a_n}\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}\right\}^2$$

$$=\frac{100}{\pi^2}\times\pi^2\times\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}+1\right)}\right\}^2\times\lim_{n\to\infty} a_n^{\ 3}\left\{\frac{1}{100+a_n\times\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}}\times\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right\}^2$$

$$=\frac{100}{\pi^2}\times\pi^2\times\frac{1}{4}\times\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^3}{\left\{100+a_n\times\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right\}^2\times(\sqrt{a_n})^2}$$

$$=\frac{100}{\pi^2}\times\pi^2\times\frac{1}{4}\times 1$$

$$=25$$

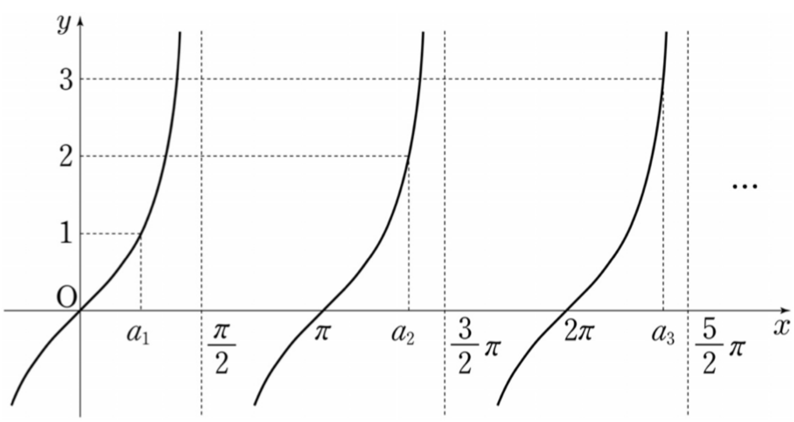
결과적으로 마지막에는 차수 비교로만 정리할 수 있는 무한대/무한대 꼴의 극한이 나와서 정리되었다.

구하는 답은 25

풀이 2) 이 문항을 보자마자 아래 2014학년도 수능 문항이 떠올랐어야 한다.

18. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=\tan x$의 그래프가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$



이 문항에서도 위 문항과 마찬가지로 $(n-1)\pi < a_n < \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$ 일 것이다.

따라서 양변을 n으로 나누면 $\dfrac{(n-1)\pi}{n} < \dfrac{a_n}{n} < \dfrac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n}$이므로

샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\pi$임을 알 수 있다.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} {a_n}^3\left\{\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}\right\}^2$$
$$=\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} {a_n}^3\left\{\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\times\frac{\sqrt{a_n}}{10}}\right\}^2=\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty} {a_n}^3\left\{\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}\right\}^2$$

위 식을 다음과 같이 변형하자.

$$\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}\right\}^2\times a_n\left(\sqrt{a_{n_{+1}}}-\sqrt{a_n}\right)^2$$

(루트)-(루트)는 유리화가 기본이므로 아래와 같이 식을 쓸 수 있다.

$$\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a_n}{100+\sqrt{a_{n+1}a_n}}\right\}^2\times a_n(a_{n+1}-a_n)^2\times\frac{1}{(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}$$

$a_{n+1}-a_n$이 π로 수렴함은 위에서 알아냈고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\pi$를 이용하기 위해 아래와 같이 식을 변형할 수 있다

$$\frac{100}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\frac{a_n}{n}}{\frac{100}{n}+\sqrt{\frac{a_na_{n+1}}{n^2}}}\right\}^2\times(a_{n+1}-a_n)^2\times\frac{\frac{a_n}{n}}{\left(\sqrt{\frac{a_{n+1}}{n}}+\sqrt{\frac{a_n}{n}}\right)^2}$$

위 수열에서 각 부분은 다 수렴하는 수 이므로, 간단한 계산을 통해 답을 도출할 수 있다.