2024학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열 I)

모집단위	학부/학과	수험번호		성　명	

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

감독확인

이 화 여 자 대 학 교

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^4+1+2a^2\left(1-2\sin^2\theta\right)\right) \qquad 2d\theta = du$$

1 실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

$$2I = \ln\left\{(a^2+1)^2 - 4a^2\sin^2\theta\right\}$$

$$\cos 2\theta = \sin\Big(\underbrace{2\theta+\tfrac{\pi}{2}}_{u}\Big)$$

(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1-2a\sin\theta\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta = I$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \ln\left(a^4+1+2a^2\sin\theta\right)d\theta =$$

(2) 치환적분을 적용하여 문항 (1)로부터 다음 등식을 유도하시오.

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^4+1+2a^2\sin\theta\right)d\theta$$

(3) 문항 (2)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta$$

$$\ln\left(1-a^{2^n}\right)^2 \le \quad \le \ln\left(a^{2^n}+1\right)^2$$

(4) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\frac{2\pi\ln\left(1-a^{2^n}\right)}{2^n} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta \le \frac{2\pi\ln\left(1+a^{2^n}\right)}{2^n}$$

(5) 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 다음 정적분을 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta = I$$

(1) $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1-2a\sin\theta\right)d\theta$ 에서 $-\theta = t$로 치환하면,

$-1d\theta = dt$, $\sin\theta = -\sin(-\theta) = -\sin t$ 이므로

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin t\right)\cdot(-1)\cdot dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta$$

(1)이 성립하므로

(2) (1)의 I를 그대로 이용하자.

$$2I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2+1-2a\sin\theta\right)d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left\{\left(a^2+1+2a\sin\theta\right)\right\}\left\{\left(a^2+1-2a\sin\theta\right)\right\}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left\{a^4+1+\left(2a^2-4a^2\sin^2\theta\right)\right\}d\theta$$

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\cos 2\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\{a^4+1+2a^2\sin(2\theta+\frac{\pi}{2})\}\,d\theta$

이 때, $2\theta+\frac{\pi}{2}=t$로 두면, $2d\theta=dt$ 이고 $-\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{3}{2}\pi$ 가 된다.

B 즉, $2I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \ln(a^4+1+2a^2\sin t)\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \ln(a^4+1+2a^2\sin t)\,dt\right]$

이 때, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \ln(a^4+1+2a^2\sin t)\,dt$ 에서 $t=\pi-v$로 치환하면, C

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin v)\,dv$ 이므로

$2I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin\theta)\,d\theta.$

(3) $n=1$ 일 때는 (2)의 등식과 같고 (2)가 성립함을 보였다.

이제 $n=k$ 일 때 (단, k는 자연수)

$\frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta = I$ 가 성립한다 가정하면,

I 에서 $\theta=-t$로 치환하면, $I=\frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1-2a^{2^k}\sin t)\,dt$

$$2I = \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}-4a^{2^{k+1}}\sin^2\theta)\,d\theta$$

$= \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\{a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin(2\theta+\frac{\pi}{2})\}\,d\theta$, $2\theta+\frac{\pi}{2}=v$로 치환하면,

$= \frac{1}{2^{k+1}}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin v)\,dv + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin v)\,dv\right]$

이 때, (2)의 C 과정을 다시 이용하여 뒤쪽의 식을 $v=\pi-z$로 치환하면

$I=\frac{1}{2^{k+1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+2}}+1+2a^{2^{k+1}}\sin\theta)\,d\theta$ 이 되어 $n=k+1$ 일 때도 성립하게 되므로

모든 자연수 n에 대하여 (3)의 등식이 성립한다.

(4) $-1 \le \sin\theta \le 1$ 이고, $-1 < a < 1$ 이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(1-a^{2^n})\,d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(1+a^{2^n})\,d\theta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(1-a^{2^n})\,d\theta = 2\pi\ln(1-a^{2^n}), \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ln(1+a^{2^n})\,d\theta = 2\pi\ln(1+a^{2^n})$$

이므로 (4)의 부등식이 성립한다.

(5) (4) 에서 양변에 $\frac{1}{2^n}$을 곱하면,

$$\frac{\pi}{2^{n-1}}\ln(1-a^{2^n}) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta \le \frac{\pi}{2^{n-1}}\ln(1+a^{2^n})$$

모든 자연수 n에 대해 성립하므로 $n\to\infty$ 일 때도 성립한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n-1}}\ln(1-a^{2^n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2^{n-1}}\ln(1+a^{2^n}) = 0$$ 이므로

정적분 값은 0이다.

2 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 함수 $f(x)$의 극댓값 M과 극솟값 m을 구하시오.

(2) $-3 \le a \le 2$인 정수 a에 대하여 함숫값 $f(a)$를 크기순으로 나열하시오. (단, $2.7 < e$)

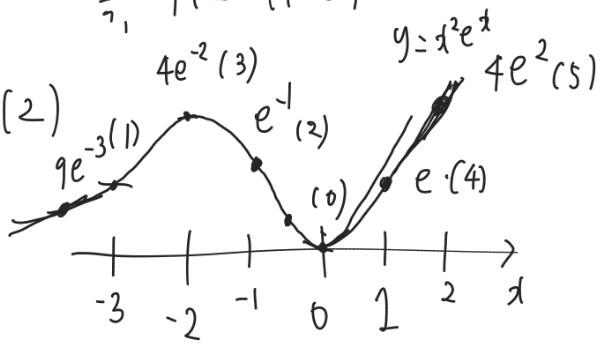
(3) 부등식 $m \le f(b) \le M$을 만족시키는 정수 b를 모두 구하시오.

(4) 방정식 $f(x)=k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.

(1) $f'(x) = (x^2+2x)e^x$ 이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=0$에서 극소를 가진다.

즉, $M = f(-2) = 4e^{-2}$이고 $m = f(0) = 0$이다.

(2)



그래프에서 $f(0) < f(-1) < f(-2)$

$f(0) < f(-3) < f(2)$,

$f(0) < f(1) < f(2)$ 이다.

이 때, $f(-1) = e^{-1}$, $f(-3) = 9e^{-3}$

$f(-1)\cdot\frac{e^2}{9} = f(-3)$ 인데

$\frac{e^2}{9} < 1$ 이므로, $f(-1) > f(-3)$이다.

또, $f(1) = e$, $f(-1) = e^{-1}$ 이고

$e > 2.7$ 이므로, $f(1) > f(-1)$,

$f(1) = e$, $f(-2) = 4e^{-2}$ 이므로,

$f(1) = f(-2)\cdot\frac{e^3}{4}$, $\frac{e^3}{4} > 1$ 이므로

$f(a)$를 작은 값 먼저 나열하면

$f(0)$, $f(-1)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$ 순이다.

$(0,\ e^{-1},\ 9e^{-3},\ 4e^{-2},\ e,\ 4e^2)$

(3) $f(x) \ge 0$이고, $f'(x) > 0$, $(x<-2)$이므로

$f(x)$는 $x<-2$ 인 모든 실수에서

$0 < f(x) \le M$을 가진다.

이 때, $m = 0$ 이므로 $m \le f(x) \le M$은

$x \le -2$인 모든 실수이고

또, $-2 \le x \le 0$일 때도 $m \le f(x) \le M$

이므로, b는 모든 음의 정수와 0이

가능하다.

또, $f(1) = e = 4e^{-2}\cdot\left(\frac{e^3}{4}\right) = \frac{e^3}{4}M > M$이고

$f(x)$는 $x>0$에서 증가하므로

b는 0 이하의 모든 정수가 된다.

4) $0<k<4e^{-2}$ 일 때, $f(x)=k$의 실근은 3개 이므로,

$f(0)=0$, $f(1)=e$ 이므로, $f(x)=k$는 $0<x<1$ 에서

반드시 실근을 가지므로 $0<k<4e^{-2}$는 불가능하다.

이 때, $k=4e^{-2}$ 여도 $0<x<1$ 에서 실근이 있으므로

이 값도 불가능하다.

즉, $f(x)=k$의 실근은 1개이며 이 때 x는 자연수이다.

$f(x)=k$ 이면서 k가 최소가 될 수 있는 자연수 x는

$x=1$ 이므로 $k=e$ 가 된다.

3 좌표평면의 원 $x^2+y^2=16$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(\sqrt{6}+\sqrt{2}, \sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\mathrm{B}(\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2})$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

$y = \frac{+2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}x + C \Rightarrow y = -x + 2\sqrt{6}$

(2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)

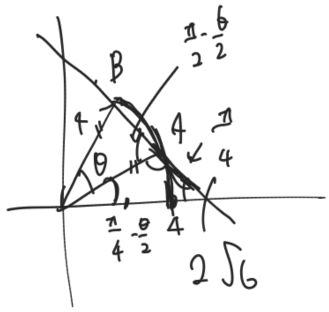
(3) 문항 (2)의 호 AB와 선분 AB로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(4) 좌표평면의 집합 $C=\{(\cos\theta-1, \sin\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$에 속하는 점 $\mathrm{P}(\cos\theta-1, \sin\theta)$에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $S(\theta)$의 최댓값을 구하시오.

$(x+1)^2+y^2=1$

(1) 두 직선 기울기는 -1이므로 $y=-x+2\sqrt{6}$

(2) 문제 상황과 (1)의 상황을 평면의 그림으로 나타내면



이 때, $\angle BOA = \theta$라 하자

직선 OA와 x축 양의 방향이

각도는 $\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$ 이고 $\overline{OA}=4$ 이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

이 때, $\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{3}$가 된다.

호 AB의 길이는 $4\cdot\theta = \frac{4}{3}\pi$

(3) 이 도형의 넓이는 (2)의 그림에서

(부채꼴의 넓이) − (삼각형의 넓이) 이다.

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$ 이고

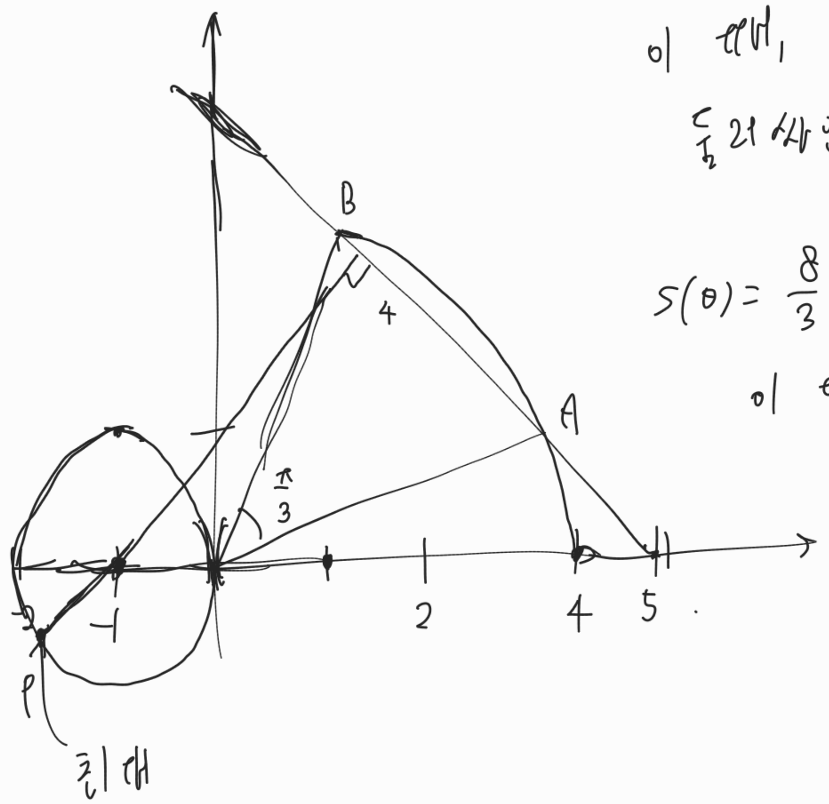
삼각형의 넓이는 넓이가 4인 정삼각형 이므로 $4\sqrt{3}$ 이다.

즉, 주어진 도형의 넓이는 $\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}$.

(4) 점 P의 자취는 $(x+1)^2+y^2=1$ 이므로

제시문과 (1)~(4)을 그림으로 나타내면

아래 그림과 같다.



이 때, 선분 AB와 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta) = \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} + (\triangle APB$의 넓이)이다.

이 때, $\triangle APB$의 넓이의 최댓값은, P와 선분 AB의 거리가 최대일 때 이다.

이 때, P와 AB의 거리가 최대일 때 그 길이는 $(-1, 0)$에서 $x+y-2\sqrt{6}=0$과의 거리$+1$ 이므로, $\frac{2\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}}+1 = 2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1$,

$\triangle APB$의 넓이 $\le 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = 4\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$,

$S(\theta) \le \frac{8}{3}\pi + 2 + \sqrt{2}$ 이므로, $S(\theta)$의 최댓값은 $\frac{8}{3}\pi+2+\sqrt{2}$ 이다.

2024학년도 수시모집 논술전형

논술고사 문제지 (자연계열 II)

모집단위	학부/학과	수험번호		성 명	

◆ 유 의 사 항 ◆

1. 시험 시간은 100분임.
2. 답안은 검은색 펜이나 연필로 작성할 것.
3. 학교명, 성명 등 자신의 신상에 관련된 사항을 답안에는 드러내지 말 것.
4. 연습은 문제지 여백을 이용할 것.
5. 답안은 해당 문항 답안지에만 작성할 것.

감독확인

이 화 여 자 대 학 교

1 실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(1) 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$$

(2) 문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta$$

(3) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi\ln(1-a^{2^n}) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^{2^{n+1}}+1+2a^{2^n}\sin\theta\right)d\theta \le 2\pi\ln(1+a^{2^n})$$

(4) 다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$$

자연 1-1과 같음

2 함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하시오. ~ $f(-1)$

(2) 부등식 $a^2e^a < 4e^{-2} < (a+1)^2e^{a+1}$과 $b^2e^b < e^{-1} < (b+1)^2e^{b+1}$을 만족시키는 정수 a,b를 모두 구하시오. (단, $2.7 < e$)

(3) 방정식 $f(x)=k$의 실근이 모두 정수인 양의 실수 k의 최솟값을 구하시오.

2-1) $f'(x)=(x^2+2x)e^x$, $x=-2$에서 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극대

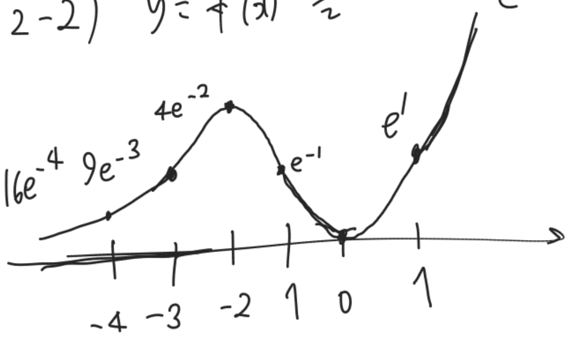
$x=0$에서 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 극소, $e \cdot 1.5$

극대 $= f(-2) = 4e^{-2}$ $f''(x)=(x^2+4x+1)e^x$ $-3e^{-2}$ $-2e^{-1}$

$-2e^{-1}$

극소 $= f(0) = 0$

2-2) $y=f(x)$ 를 그려보면 다음과 같다.



$\frac{e^2}{9}$

여기서 $f(x)=4e^{-2}$인 x는 2개이다.

이 때, $x=-2$를 근으로 가지며, $f(0)=0$, $f(1)=e=4e^{-2}\cdot(\frac{e^2}{4})>4e^{-2}$

이므로, $0<x<1$ 에서 1개의 근을 가지므로

$f(a) < 4e^{-2} < f(a+1)$을 만족하는 $a=0$ 뿐이다.

$f(x)=e^{-1}$을 만족하는 x의 근은 3개이다.

이 때, $f(0)=0$, $f(1)=e=e^{-1}(e^2)>e^{-1}$ 이므로

$f(b) < e^{-1} < f(b+1)$을 만족하는 b는 0이 존재하고,

$f(-4)=16e^{-4}=e^{-1}(16\cdot e^{-3})<e^{-1}$, $f(-3)=9e^{-3}=e^{-1}(9e^{-2})>e^{-1}$

이므로 $b=-4$ 로 가능하다.

2-3) 자연 1, 2-4 참조.

3 좌표평면의 원 $x^2+y^2=16$ 위의 두 점 $A(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, $B(\sqrt{6}-\sqrt{2}, \sqrt{6}+\sqrt{2})$에 대하여 다음 물음에 답하시오. [30점]

(1) 두 점 A,B를 지나는 직선의 방정식을 구하시오.

$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

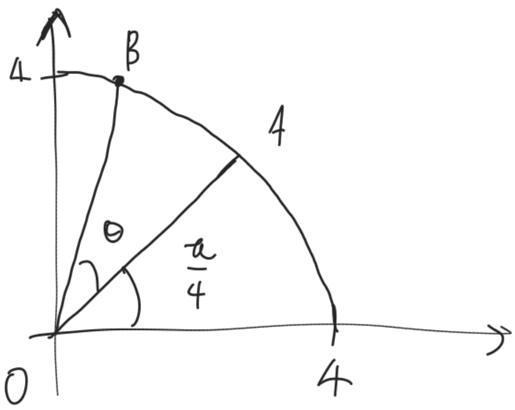
(2) 호 AB의 길이를 구하시오. (단, 호 AB는 제1사분면에 있다.)

(3) 좌표평면의 집합 $C=\{(\cos\theta-1, \sin\theta) \mid 0 \le \theta < 2\pi\}$에 속하는 점 $P(\cos\theta-1, \sin\theta)$에 대하여 문항 (2)의 호 AB와 두 선분 AP, BP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $S(\theta)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때 $(M-m)^2$의 값을 구하시오.

(1) $y = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{18}}(x-2\sqrt{2})+2\sqrt{2} \Rightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2\sqrt{2}$

1사분면의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

(2)



이 때, $\overline{OB}=4$이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

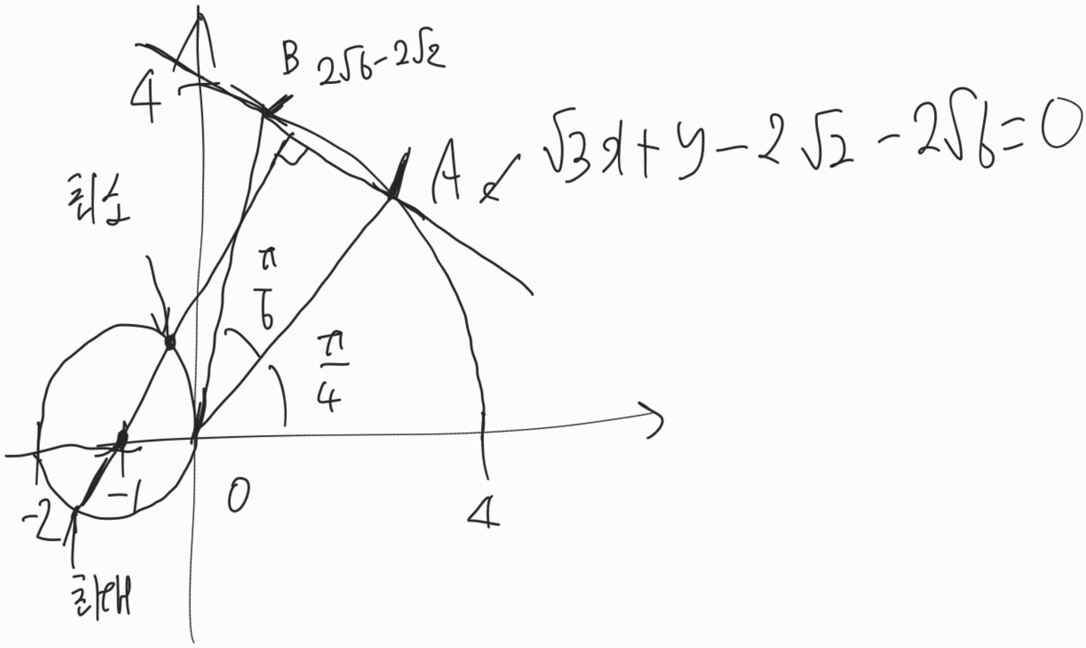
$\Rightarrow \sqrt{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

호 AB의 길이는 $\frac{2}{3}\pi$

(3) 점 P의 자취는 $(x+1)^2+y^2=1$ 이다.

제시문과 (1)~(3)의 상황을 나타내면,



문제의 조건에 의해

$S(\theta)$의 넓이는 (부채꼴 ABO의 넓이) − (△ABO의 넓이)
+ (△ABP의 넓이) 가 되는데,

부채꼴 ABO의 넓이와 △ABO의 넓이는 상수이므로

$S(\theta)=$ △ABP의 넓이 $+ C$ 로 둘 수 있다.

이 때 M은 △ABP의 넓이가 최대일 때이고

m은 △ABP의 넓이가 최소일 때이므로

$M-m$은 △ABP 넓이의 최대와 최솟값의 차이이다.

또한 $\overline{AB} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle ABP$의 넓이는 점 P와 직선 AB 간의 거리로

결정되며,

점 $(-1, 0)$과 직선 AB의 거리를 d로 둘 때,

점 P와 직선 AB의 거리의 최댓값은

$d+1$, 최솟값은 $d-1$ 이다.

이 때,

$$M - m = \left\{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (d+1)\right\} - \left\{(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (d-1)\right\}$$

$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ 이고

$(M - m)^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3}$ 이다