02 지수함수 로그함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 1

다음 중에서 극한값이 존재하는 것을 모두 찾아라.[1)]

㉠ $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$

㉡ $\lim_{x\to0}\dfrac{1-5^{\frac{1}{x}}}{1+5^{\frac{1}{x}}}$

㉢ $\lim_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2x^2+3x}{x^2-2}$

㉣ $\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}$

문제 2

1986년 우크라이나의 체르노빌에서는 원자력 발전소의 사고로 대기 중에 방사성 물질이 유출되었다. 사고가 발생한 초기에는 방사성 물질이 계속 유출되어 대기 중에 방사성 물질의 양이 늘어났다. 추가 유출을 막는 데 성공한 뒤 t시간 후에 대기 중에 남아 있는 방사성 물질의 양을 $M(t)$라고 하면

$$M(t)=ke^{-rt}\ (k,\ r\text{는 양의 상수})$$

이 성립한다고 하자. 이때 극한값 $\lim_{t\to\infty}M(t)$를 구하여라. [2)]

문제 3

뉴턴의 냉각 법칙에 의하면 물체의 냉각 비율은 주위와의 온도 차에 비례한다고 한다. 즉, 물체 주위의 온도를 T_a, 물체의 초기 온도를 T_0이라고 할 때, t분 후 물체의 온도

$T(t)$는 $T(t)=T_a+(T_0-T_a)e^{-kt}$ (k는 상수)이라고 한다. 연주는 캠핑장에서 주전자에 물을 끓여서 10 ℃인 계곡물에 담가 식히기로 하였다. 다음 물음에 답하여라 .[3)]

(1) 10분 후 주전자에 든 물의 온도가 60 ℃라고 할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

(2) $\lim_{t\to\infty}T(t)$의 값을 구하여라.

문제 4

$\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=e$를 만족하는 실수 a의 값을 구하여라.[4)]

02 지수함수 로그함수의 미분

문제 5

다음 극한값을 구하여라. 5)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$

문제 6

극한값 $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ 은?6)

① 0　② $\frac{1}{e}$　③ 1

④ e　⑤ e^2

문제 7

세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$$

일 때, $a+b+c$의 값은? 7)

① 5　② 6　③7

④ 8　⑤ 9

문제 8

$\lim_{x\to\infty} f(x)\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)=3$을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2x}$ 를 구하여라.8)

02 지수함수 로그함수의 미분

미적분II 교과서 Review

문제 9

$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - e^{x-1}}{x^2+2x-3} = 3$일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.9)

문제 10

$f(n) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$의 값을 구하여라.10)

문제 11

자연수 n에 대하여

$$f(n) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{nx} - n}$$

일 때, 극한값 $\lim_{n \to \infty} n^2 f(n)$을 구하여라.11)

문제 12

함수 $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ $(x > 1)$에 대하여 |보기|에서 옳은 것을 모두 고른 것은? 12)

|보기|

ㄱ. $\lim_{x \to \infty} f(x) = e$

ㄴ. $\lim_{x \to \infty} f(x)f(x+1) = e^2$

ㄷ. $k \geq 2$일 때, $\lim_{x \to \infty} f(kx) = e^k$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

02 지수함수 로그함수의 미분

문제 13

함수 $f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(\log_2 x)^h-1}{h}$ 일 때, $f(x^2)-f(x)$의 값을 구하여라. (단, $x\neq 2$, $x>1$)13)

문제 14

모든 실수에 대하여 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-1)f(x)=e^{2x-2}-1$$

을 만족할 때, $f(1)$은?14)

① 0　　② 1　　③ 2

④ 3　　⑤ 4

문제 15

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{e^x+2x-1} & (x\neq 0)\\ k & (x=0)\end{cases}$가 $x=0$에서 연속일 때, 실수 k의 값을 구하여라.15)

문제 16

함수 $f(x)=\begin{cases}ae^{-x} & (x\leq 1)\\ x^2-bx+1 & (x>1)\end{cases}$이 모든 실수 x에 대하여 미분가능할 때, 실수 a, b의 값을 각각 구하여라. 16)

1) ㉠ ∞ ㉡ 존재하지 않는다.
㉢ 1 ㉣ e^{-2}
따라서 극한값이 존재하는 것은 ㉢, ㉣이다

2) $\lim_{t \to \infty} M(t) = \lim_{t \to \infty} ke^{-rt} = k \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{rt}}$
$= k \cdot 0 = 0$

3)
(1) $T_0 = 100$, $T_a = 10$, $T(10) = 60$ 이므로 관계식
$$60 = 10 + (100 - 10)e^{-10k}$$
이 성립한다. 즉, $e^{-10k} = \frac{5}{9}$
양변에 자연로그를 취하면 $-10k = \ln\frac{5}{9}$
따라서 $k = -\frac{1}{10}\ln\frac{5}{9}$
(2) $k > 0$ 이므로 $\lim_{t \to \infty} T(t) = \lim_{t \to \infty}(10 + 90e^{-kt}) = 10$

4) $-\frac{1}{2}$

5) $\lim_{n \to \infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$
$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{n+1}}{n}\times\frac{\cancel{n+2}}{\cancel{n+1}}\times\cdots\times\frac{2n+1}{\cancel{2n}}\right)^n$
$= \lim_{n \to \infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

6) ④

7) $\lim_{x \to \infty}\ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right) = 0$ 이려면 $\lim_{x \to \infty}\left(b+\frac{c}{x^2}\right) = 1$ 이
어야 하므로 $b = 1$
$\lim_{x \to \infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)$
$= \lim_{x \to \infty} cx^{a-2}\ln\left(1+\frac{c}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{c}}$
$= \lim_{x \to \infty} cx^{a-2} = 2$
에서 a, c가 양수이므로
$a = 2$, $c = 2$
$\therefore a+b+c = 2+1+2 = 5$

8) $-\frac{3}{4}$

9) $\lim_{x \to 1}\frac{x^n - e^{x-1}}{x^2+2x-3}$
$= \lim_{x \to 1}\frac{(x^n-1)-(e^{x-1}-1)}{(x-1)(x+3)}$
$= \lim_{x \to 1}\frac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x+3} - \lim_{x \to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\times\frac{1}{x+3}$
$= \frac{4}{n} - 1\times\frac{1}{4} = \frac{n-1}{4}$
이때 $\lim_{x \to 1}\frac{x^n - e^{x-1}}{x^2+2x+3} = 3$ 이므로
$\frac{n-1}{4} = 3$, $n = 13$

10) $f(n)$
$= \lim_{x \to 0}\frac{x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2+\cdots+\frac{\ln(1+nx)}{nx}\cdot n}$$

$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

11) 2

12) ㄱ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e$$

ㄴ. $$\lim_{x\to\infty}f(x+1)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)f(x+1)=\lim_{x\to\infty}f(x)\lim_{x\to\infty}f(x+1)=e\cdot e=e^2$$

ㄷ. $kx-1=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}f(kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx}{kx-1}\right)^{kx}=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

13) $\ln 2$

14) ③

15) 1

16) 함수 $f(x)$는 연속이므로

$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$에서

$2-b=ae^{-1}$ …… ①

$$f'(x)=\begin{cases}-ae^{-x} & (x\le 1)\\ 2x-b & (x>1)\end{cases}$$

$\lim_{x\to 1-}f'(x)=\lim_{x\to 1-}(-ae^{-x})=-ae^{-1}$

$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1+}(2x-b)=2-b$

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$-ae^{-1}=2-b$ …… ②

①, ②에서 $a=0$, $b=2$